



Analyse Cinétostatique des Machine Parallèles à Translations

Félix Majou

► To cite this version:

Félix Majou. Analyse Cinétostatique des Machine Parallèles à Translations. Robotique [cs.RO]. Ecole Centrale de Nantes (ECN); Université Laval (Québec, Canada), 2004. Français. NNT: . tel-01385182

HAL Id: tel-01385182

<https://hal.science/tel-01385182>

Submitted on 21 Oct 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCOLE DOCTORALE

MECANIQUE, THERMIQUE ET GENIE CIVIL

Année 2004

N° B.U. :

Thèse de DOCTORAT EN COTUTELLE

*Diplôme délivré par
L'École Centrale de Nantes et l'Université de Nantes (France) d'une part,
et par L'Université Laval (Canada), d'autre part.*

Spécialité : GENIE MECANIQUE

Présentée et soutenue publiquement par :

FELIX MAJOU

le vendredi 24 Septembre 2004
à L'Ecole Centrale de Nantes à Nantes

TITRE

ANALYSE CINETOSTATIQUE DES MACHINES PARALLELES A TRANSLATIONS

JURY

Président : Jean-Pierre Merlet

Directeur de Recherches INRIA, Nice Sophia-Antipolis

Rapporteurs : François Pierrot
Luc Baron

Directeur de Recherches CNRS, Université de Montpellier II
Professeur, Ecole Polytechnique de Montréal

Examineurs : Clément Gosselin
Meyer Nahon
Philippe Wenger

Professeur, Université Laval, Québec
Professeur, Université McGill, Montréal
Directeur de Recherches CNRS, Ecole Centrale Nantes

Invité : Damien Chablat

Chargé de Recherches CNRS, Ecole Centrale Nantes

Directeur de thèse : Philippe Wenger

Laboratoire : Institut de Recherches en Communication en Cybernétique de Nantes

Co-encadrant : Damien Chablat

Directeur de thèse : Clément Gosselin

Laboratoire : Laboratoire de Robotique

Remerciements

Je remercie MM. Luc Baron et François Pierrot qui ont accepté d’être rapporteurs de ma thèse.

Je remercie MM. Meyer Nahon et Jean-Pierre Merlet qui ont accepté d’être examinateurs lors de ma soutenance.

Je remercie mes directeurs et encadrant de thèse, MM. Clément Gosselin, Philippe Wenger et Damien Chablat, pour leur encadrement professionnel et rigoureux, leur gentillesse et leur disponibilité en toute circonstance.

Je remercie les membres de l’équipe MCM du laboratoire IRCCyN de l’Ecole Centrale Nantes pour leur aide et leur présence.

Je remercie les membres du Laboratoire de Robotique de l’Université Laval à Québec, dont la disponibilité et l’enthousiasme contribuent à faire du ‘lab’ un lieu de travail inspirant.

À ma famille et aux amis des deux bords de l’Atlantique qui m’ont accompagné durant cette cotutelle franco-canadienne, je dis un grand merci !

Je soutiens l’action du comité français “Sauvons la recherche”, qui je l’espère portera ses fruits au plus vite.

Résumé

Le but de cette thèse est de proposer des outils nouveaux pour l'analyse et la conception de machines parallèles à translations, c'est-à-dire des mécanismes parallèles à translations destinés à l'usinage (Parallel Kinematic Machines ou PKM en Anglais).

Tout d'abord, un état de l'art complet et actualisé de la conception de PKM est présenté, avec une focalisation sur la synthèse structurelle et géométrique de PKM à translations.

On propose ensuite une notion nouvelle : l'espace dextre régulier (EDR). C'est une partie de l'espace de travail dont la forme est régulière (cube, cylindre) et dans laquelle les performances cinéostatiques (amplification des vitesses, conditionnement) sont limitées.

Deux méthodes sont proposées pour le calcul de l'EDR : l'une basée sur l'analyse par intervalles qui garantit numériquement le résultat, l'autre basée sur la discrétisation du volume de travail qui est plus rapide et intuitive mais qui ne garantit pas le résultat. Les deux méthodes sont complémentaires. Les caractéristiques d'une PKM intéressantes pour l'usinage sont quantifiées à partir du volume de l'EDR et du rapport entre celui-ci et le volume de travail.

On forme ainsi de nouveaux indices de performance adaptés aux PKM à translations pour optimiser leur géométrie ou les comparer entre elles. Nous comparons par exemple différentes PKM à translations de type Delta linéaire et 3-UPU. Peu de travaux portent sur la comparaison de PKM de familles différentes, ce qui fait l'intérêt de cette contribution.

Notre deuxième contribution est une méthode pour améliorer la rigidité des PKM à translations en analysant l'influence des paramètres géométriques qui n'influencent pas sur le volume de l'EDR.

Nous utilisons une méthode existante qui modélise la flexibilité des membrures avec des liaisons élastiques virtuelles. L'intérêt de cette méthode est sa genericité : elle peut être adaptée facilement à n'importe quelle PKM. Nous l'implémentons sous MAPLE, c'est-à-dire sous forme symbolique, ce qui est nouveau.

On obtient ainsi la matrice de raideur d'une PKM à translations, l'Orthoglide (dont un

prototype est construit à l'IRCCyN), en fonction des paramètres géométriques et de la position Cartésienne, et on observe très facilement l'influence de chaque paramètre.

Utiliser une Méthode Eléments Finis pour cette tâche prendrait beaucoup plus de temps car il faudrait remailler pour chaque configuration de la machine. L'analyse de l'influence de chaque paramètre permet de mettre en évidence les membrures critiques pour la rigidité. Les expressions symboliques des éléments de la matrice de raideur étant impossibles à visualiser telles quelles (la taille de certains éléments va jusqu'à 10 pages), une décomposition en cascade est proposée pour faciliter cette tâche.

Enfin, un couplage simple de l'analyse de rigidité avec l'analyse dynamique de l'Orthoglide est proposé et permet d'observer simultanément l'influence des paramètres critiques sur la rigidité statique et sur les performances dynamiques.

Abstract

The aim of this thesis is to propose new tools for the design and analysis of translational Parallel Kinematic Machines (PKM), which are translational parallel robotic manipulators aimed at manufacturing.

First, an exhaustive state-of-the-art on PKM design is presented, and focuses on structural and geometrical synthesis of translational PKM.

A new concept is then proposed: the Regular Dextrous Workspace (RDW). It is a part of the workspace whose shape is regular (cube, cylinder) and the kinetostatic performances (transmission factor, conditioning index) are bounded inside the RDW.

Two methods are proposed to determine the RDW : one is based on interval analysis and is numerically reliable, while the other is based on Cartesian workspace discretization, is faster and more intuitive but does not prove the result numerically. The two methods are complementary. Interesting PKM features regarding manufacturing constraints are evaluated thanks to the RDW volume and to the ratio between this volume and the workspace.

New performance indices fitting translational PKM constraints are then proposed and can help optimising PKM geometry or compare several translational PKM. For instance, we compare several Linear Delta PKM, a 3-UPU based PKM. Few papers deal with PKM comparison, which is one interest of this contribution.

Our second major contribution is a method to improve translational PKM stiffness from influence analysis of geometrical parameters that are not related to RDW volume.

We use an existing stiffness method that model links flexibility with virtual elastic joints. A major advantage of this method is its genericity: it can be easily adapted to any PKM. We implement this method with MAPLE, i.e. it is a symbolic implementation, which is new.

The stiffness matrix of a translational PKM prototype, the Orthoglide (built at IRCCyN), is then computed as a function of the geometrical parameters and the Cartesian coordinates, and one can easily observe each parameter influence.

If we had used a Finite Elements Method, it would have taken time to mesh the structure for each Cartesian position. Analysing each parameter influence allows to display the critical links regarding the machine stiffness. Symbolic expressions of stiffness matrix elements can not be visualized as their size can vary up to ten worksheets, therefore a cascade decomposition is proposed to make this vizualisation easier.

Then, the Orthoglide stiffness analysis is simultaneously conducted with dynamic analysis in order to study the relationship between dynamic performances and static stiffness performances.

Table des matières

Résumé	ii
Abstract	iv
Table des matières	vi
Liste des tableaux	xii
Table des figures	xiv
1 Introduction	1
2 Conception de machines-outils à cinématique parallèle	3
2.1 Notions importantes en robotique parallèle	4
2.1.1 Préliminaires	4
2.1.2 La matrice Jacobienne (cinématique)	5
2.1.3 La dextérité	5
2.1.4 Les Facteurs d'Amplification de Vitesse	6
2.1.5 Singularités	7
2.1.5.1 Les singularités classiques	7
2.1.5.2 Les singularités de contrainte	9
2.1.6 Modes d'assemblage et de fonctionnement	10
2.1.7 Espace de travail	11
2.1.8 Manipulateurs pleinement parallèles	12
2.1.9 Redondance	12
2.1.10 Manipulateurs hybrides	13
2.2 Application des mécanismes parallèles à l'usinage	14
2.2.1 Limites des machines outils classiques	14
2.2.2 État de l'art des PKM possédant plus de 3 DDL	15
2.2.2.1 Préambule	15
2.2.2.2 PKM dont la longueur des jambes varie	15

2.2.2.3	PKM dont la longueur des jambes est fixe	18
2.2.2.4	PKM redondantes	19
2.2.2.5	PKM hybrides	20
2.2.3	Les PKM à 3 DDL en translation	23
2.2.3.1	Préambule	23
2.2.3.2	Les TPM linéaires	23
2.2.3.3	Les TPM linéaires isotropes	24
2.2.3.4	Les TPM à jambes de longueur variable	25
2.2.3.5	Les TPM de type Delta	27
2.2.3.6	Conclusions	28
2.2.4	Avantages et inconvénients des PKM	29
2.2.4.1	Avantages	29
2.2.4.2	Inconvénients	30
2.2.4.3	Solutions possibles pour pallier les inconvénients des PKM . . .	31
2.2.4.4	Conclusions	34
2.3	Synthèse de mécanismes parallèles	36
2.3.1	Introduction	36
2.3.1.1	Données du problème	36
2.3.1.2	Une approche globale est nécessaire	36
2.3.1.3	Exemples d'approches globales	37
2.3.1.4	Conclusion	37
2.3.2	Synthèse structurelle	37
2.3.2.1	Généralités	37
2.3.2.2	Principes	38
2.3.2.3	Utilisation de la théorie des visseurs	38
2.3.2.4	Utilisation du groupe de Lie des déplacements	40
2.3.3	Synthèse géométrique	42
2.3.3.1	Introduction	42
2.3.3.2	À partir d'un indice cinétostatique	42
2.3.3.3	À partir d'un indice cinétostatique et du volume de de l'espace de travail	43
2.3.3.4	À partir d'une mesure de la rigidité et du volume de l'espace de travail	45
2.3.3.5	À partir d'un volume inscrit dans de l'espace de travail	45
2.3.3.6	À partir d'un volume de travail prescrit	45
2.3.3.7	À partir de la raideur	46
2.3.3.8	Conclusion	46
2.4	Indices de performance pour l'évaluation et la comparaison de PKM	46
2.4.1	La comparaison de PKM	46
2.4.2	Comparaison des indices de performance existants	48
2.4.3	L'empreinte au sol d'une PKM	50

2.4.4	Conclusion	50
2.5	Un critère de performance fondamental : la précision	51
2.5.1	Introduction	51
2.5.2	Étalonnage géométrique	51
2.5.3	Analyse de sensibilité pour la synthèse de tolérances	52
2.5.4	Prise en compte de la déformation des membrures	52
2.5.4.1	Introduction	52
2.5.4.2	Modélisation par Éléments Finis	53
2.5.4.3	Modèle de rigidité cinématique avec membrures rigides	53
2.5.4.4	Modélisation de la flexibilité des membrures	54
2.6	Conclusions	55
3	Évaluation des PKM à translations avec des indices cinétostatiques	58
3.1	Optimisation topologique de l'Orthoglide	59
3.1.1	Le projet	59
3.1.2	Optimisation de l'architecture	60
3.1.3	Détection et élimination des singularités internes	60
3.1.4	Orientation des parallélogrammes	62
3.1.5	Analyse statique du parallélogramme aplati	64
3.2	Une notion nouvelle : l'Espace de travail Dextre Régulier	65
3.2.1	Notion intuitive	65
3.2.2	Passage d'un EDA à un autre	66
3.2.3	Définition formelle de l'EDR	68
3.2.4	Définition de nouveaux indices de performance	69
3.3	Calcul du volume de l'espace de travail dextre régulier	70
3.3.1	Préliminaires	70
3.3.2	Calcul de l'EDR en discrétisant l'espace de travail	70
3.3.3	Calcul de l'EDR en utilisant l'analyse par intervalles	73
3.3.3.1	Préliminaires	73
3.3.3.2	Description de la méthode	73
3.4	Évaluation des performances d'une PKM plane à translations	75
3.4.1	Définition des facteurs d'amplification de vitesse	76
3.4.2	Choix des bornes sur les FAV	76
3.4.3	Choix de la forme de l'EDR	77
3.4.4	Choix de l'orientation de l'EDR	84
3.5	Évaluation des performances de PKM spatiales à translations	86
3.5.1	Modèle cinématique de la famille de l'Orthoglide	86
3.5.2	Évaluation des performances de l'Orthoglide pour des EDR cubique, cylindrique, sphérique.	88
3.5.3	Évaluation des performances de l'Orthoglide lorsque la longueur d'une jambe varie	93

3.5.4	Comparaison de l'Orthoglide avec d'autres PKM à translations	95
3.5.4.1	Comparaison de l'Orthoglide avec l'UroneSX en utilisant l'analyse par intervalles	95
3.5.4.2	Comparaison de l'Orthoglide avec d'autres PKM à translations	99
3.5.5	Évaluation d'une PKM à translations à liaisons actionnées rotatives : le robot Delta	104
3.6	Notion d'EDR prenant en compte la direction de déplacement	106
3.6.1	Pourquoi prendre en compte la direction de déplacement	106
3.6.2	Définition et détermination de l'EDR directionnel	106
3.6.3	Détermination de la validité d'un point de l'EDR directionnel	108
3.7	Nouveaux indices de performances basés sur la notion d'EDR	110
3.8	Résultats intermédiaires	116
3.9	Conclusion	116
4	Analyse paramétrique de la rigidité de l'Orthoglide	119
4.1	Introduction	120
4.1.1	Choix de la méthode de rigidité	120
4.1.2	Continuité de la démarche d'analyse des PKM à translations	121
4.2	Modélisation flexible de l'Orthoglide	121
4.2.1	Paramétrage	121
4.2.2	Localisation des liaisons élastiques virtuelles	122
4.2.3	Calcul des raideurs des liaisons élastiques	125
4.2.3.1	Calcul de la raideur k_2 du pied en flexion due à la force F . . .	125
4.2.3.2	Calcul de la raideur k_3 du pied en flexion due au couple T . . .	126
4.2.3.3	Calcul de la raideur k_4 du pied en torsion due au couple T . . .	126
4.2.3.4	Calcul de la raideur k_5 du pied en traction/compression due à l'effort F	127
4.2.3.5	Calcul de la raideur k_6 de la rotation de section du pied due au couple T	128
4.2.3.6	Calcul de la raideur k_9 des barres du parallélogramme sollicitées en traction/compression par la force F transmise par la jambe .	128
4.2.3.7	Calcul de la raideur k_{11} du parallélogramme en tension différentielle due au couple T	129
4.2.4	Analyse de l'influence de l'hyperstatisme	129
4.3	Calcul symbolique de la matrice de raideur	130
4.3.1	Modélisation cinématique d'une jambe	130
4.3.2	Élimination des variables passives	132
4.3.3	Calcul de la matrice de raideur	134
4.4	Analyse de l'influence individuelle des liaisons élastiques et simplification du modèle	136
4.4.1	Intérêts d'une telle analyse	136
4.4.2	Choix d'un EDR	137

4.4.3	Rigidifier une liaison élastique virtuelle	137
4.4.4	Influence individuelle de chaque liaison élastique	138
4.4.5	Nouveau modèle de jambe flexible	141
4.5	Décomposition en cascade des expressions symboliques	141
4.6	Analyse paramétrique de la complaisance	145
4.6.1	Dans la configuration isotrope	145
4.6.1.1	Expressions symboliques simples	145
4.6.1.2	Analyse qualitative	146
4.6.1.3	Analyse quantitative	146
4.6.1.4	Couplage raideur/dynamique	155
4.6.2	Dans l'espace de travail dextre régulier	157
4.6.2.1	Choix d'une zone de contrôle	157
4.6.2.2	Observation des κ_{ij} le long de l'axe (Q_1Q_2)	158
4.6.3	Observation de κ_{44} dans tout l'EDR	168
4.7	Influence sur la rigidité de la variation simultanée de deux paramètres	172
4.8	Influence de la longueur L_{B_3} des barres de la jambe verticale	174
4.9	Analyse des déplacements compliants de l'outil	175
4.9.1	Calcul des déplacements compliants	175
4.9.2	Exemple d'une décomposition en cascade d'un déplacement	176
4.9.3	Choix d'une zone de travail en fonction de la tâche	178
4.10	Comparaison du modèle de rigidité avec des mesures, avec un modèle éléments finis	181
4.10.1	Mesure expérimentale de la raideur	181
4.10.2	Avec un modèle éléments finis	182
4.11	Conclusions	184

5 Conclusions 186

5.1	État de l'art de la conception de PKM	187
5.2	Contributions Franco-Québécoises à la conception de PKM	188
5.2.1	Contexte géoscientifique de la thèse	188
5.2.2	Proposition d'une démarche pour l'analyse et la conception de PKM à translations	188
5.3	Perspectives	189

Bibliographie 191

A Occurrence de configurations isotropes pour les PKM à translations munies de liaisons actionnées prismatiques 200

A.1	Le Biglide	201
A.2	L'Orthoglide	202
A.3	Le Y-Star	203
A.4	L'UranesX	203

A.5	Le 3-UPU	205
B	Influence de l'hyperstatisme sur la rigidité de l'Orthoglide	206
C	Expressions symboliques des κ_{ij}	210
C.1	Simplification des expressions symboliques	211
C.2	Trois exemples d'expressions symboliques des κ_{ij}	211
C.2.1	Expressions les moins volumineuses	211
C.2.2	Moyennement volumineuses	212
C.2.3	Très volumineuses	213

Liste des tableaux

2.1	Comparaison des PKM avec les machines outils sérielles	34
2.2	Indices de performances couramment utilisés	49
3.1	Comparaison des performances du Biglide pour un EDR carré ou circulaire . . .	81
3.2	Performances du Biglide pour un EDR carré orienté de deux façons différentes .	85
3.3	Calcul des plus grands EDR cubique, cylindrique, sphérique de l'Orthoglide . . .	90
3.4	Performances de l'Orthoglide selon l'indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$ pour différents EDR . . .	90
3.5	Variation en fonction de λ de la longueur du côté de l'EDR carré de l'UraneSX .	98
3.6	Résultats de la comparaison entre l'Orthoglide et l'UraneSX	99
3.7	Détermination des plus grands EDR cubique et cylindrique des PKM UraneSX, 3-UPU, Y-STAR, Hybridglide, Triaglide	102
3.8	évaluation de PKM � translations selon l'indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$ pour les plus grands EDR cubique et cylindrique	103
3.9	Nouveaux indices basés sur la notion d'EDR	111
3.10	Volumes enveloppes des PKM UraneSX, 3-UPU, Y-STAR, Hybridglide, Tria- glide, Orthoglide	112
3.11	évaluation de l'Orthoglide, de l'UraneSX, du Y-STAR, de l'Hybrid-glide, du Triaglide et du 3-UPU selon différents indices basés sur l'EDR	114
4.1	Paramètres géométriques utilisés pour la modélisation flexible de l'Orthoglide . .	122
4.2	Modélisation des raideurs des liaisons élastiques virtuelles	124
4.3	Paramètres de Denavit-Hartenberg [Denavit 64] d'une jambe munie de liaisons élastiques	131
4.4	Paramètres de Denavit-Hartenberg du nouveau modèle de jambe flexible	142
4.5	Variables dans $N_{\kappa_{44}}$ et $D_{\kappa_{44}}$	144
4.6	Valeur initiale de chaque paramètre variable	147
4.7	Couleurs associées aux paramètres variables	148
4.8	Couleur et valeur initiale des paramètres variables	158

4.9	Tableau de synthèse sur l'influence des paramètres sur la rigidité	166
4.10	Variation de $\kappa_{44}(t)/\kappa_{44_{initiale}}$ en fonction des paramètres : graphe 1	169
4.11	Variation de $\kappa_{44}(t)/\kappa_{44_{initiale}}$ en fonction des paramètres : graphe 2	170
4.12	Influence des paramètres sur κ_{44}	171
4.13	Variables dans N_{v_z} et D_{v_z}	177
4.14	Comparaison du MMR avec un Modèle Éléments Finis	183

Table des figures

2.1	Mécanismes parallèles à jambes de longueur variable ou fixe	4
2.2	Manipulabilité d'une PKM plane dans deux configurations différentes	7
2.3	Singularité sérielle	7
2.4	Singularité parallèle	8
2.5	Singularité architecturale	8
2.6	Singularité de contrainte d'un mécanisme 4 barres	9
2.7	Mécanisme 3-URU <i>DYMO</i>	10
2.8	Modes de fonctionnement	11
2.9	Modes d'assemblage	11
2.10	Mécanisme pleinement parallèle de type hexapode	12
2.11	Deux sortes de redondance pour les mécanismes parallèles	13
2.12	Mécanisme parallèle Archi	13
2.13	Machine outil sérielle	14
2.14	PKM Variax de Giddings and Lewis	16
2.15	PKM 6X de Mikromat	16
2.16	PKM Hexapode CMW300	17
2.17	PKM P800 de Metrom	17
2.18	PKM Seyanka de Tekniker	18
2.19	Machine Hexaglide	18
2.20	Machine HexaM	19
2.21	PKM Eclipse 1 et 2	19
2.22	Débattement de +/- 90 degrés pour l'Eclipse 1	20
2.23	Machine Hexabot	20
2.24	Mécanisme du Tricept et Centre d'Usinage 5 axes	21
2.25	Orthoglide 5 axes	21
2.26	PKM Sprint Z3	22
2.27	PKM Hermes de Fatronik	22

2.28	PKM Ulyses ZAB de Fatronik	22
2.29	LTPM proposé dans [Kong 02b]	24
2.30	LTPM isotrope [Kong 02b]	24
2.31	Manipulateur Cartésien [Kim 02b]	25
2.32	LTPM isotrope [Carricato 02]	25
2.33	Mécanisme 3-UPU	26
2.34	TPM de type 3-RPC [Callegari 03]	27
2.35	Le robot Delta	27
2.36	Le Triaglide	28
2.37	PKM de type Delta linéaire à liaisons prismatiques parallèles	29
2.38	Forme de l'espace de travail du Tricept	30
2.39	Utilisation d'une jambe passive pour s'affranchir des effets de la dilatation et des déformations	31
2.40	Utilisation de la redondance pour contrer les effets des singularités parallèles	32
2.41	Changement de mode de fonctionnement pour contrer les effets des singularités parallèles	32
2.42	Isolation des moteurs de l'UraneSX	33
2.43	Protection des vis à billes par un soufflet	33
2.44	Sollicitation en flexion d'une jambe d'un LTPM isotrope	35
2.45	Mécanisme LTPM isotrope de [Kong 02a]	40
2.46	Mécanisme sphérique de [Karouia 03]	42
2.47	Mécanisme CaPaMan	43
2.48	Mécanisme Y-Star [Hervé 92]	44
2.49	Mécanisme tripode	45
2.50	Volume d'une PKM plane	48
2.51	Modélisation flexible du 3-UPU	54
3.1	Architecture cinématique de l'Orthoglide [Wenger 00], [Chablat 03]	59
3.2	Structure initiale des jambes de l'Orthoglide	60
3.3	Architecture initiale de l'Orthoglide	61
3.4	Singularité du parallélogramme à l'isotropie = anti-parallélogramme	61
3.5	Jambe ré-arrangée pour prévenir l'anti-parallélogramme	61
3.6	Singularité de la jambe de type RPM-IO-II à l'isotropie	62
3.7	Version finale de la jambe de l'Orthoglide	62
3.8	Version finale de l'Orthoglide	63
3.9	Version finale de la jambe pour un Orthoglide isostatique	64
3.10	Aplatissement du parallélogramme	64
3.11	Espace dextre total discontinu	67
3.12	Singularité parallèle du mécanisme analysé dans [Hesselbach 02]	67
3.13	EDA superposés mais dont l'intersection est vide	68
3.14	PKM à deux degrés de liberté en translation : le Biglide	77

3.15	Représentation des lieux de singularités et de l'aspect \mathcal{A} dans lequel on travaille	78
3.16	Recherche des plus grands $\mathcal{V}_{\mathcal{F}_{Limite}}$	78
3.17	Accroissement de $\mathcal{V}_{\mathcal{F}}$ en calculant les FAV le long des côtés	79
3.18	Représentation 3D des FAV	79
3.19	L'EDA du Biglide et son espace de travail pour un EDR carré ou circulaire	80
3.20	Plus grands EDR cubique et circulaire avec $\rho \in [-0.3, 0.3]$	83
3.21	Indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$ pour un EDR carré ou circulaire, les butées articulaires étant prédéfinies	83
3.22	Deux orientations pour le plus grand EDR carré	84
3.23	Plus grands EDR carrés pour des butées articulaires fixées et deux orientations différentes ($\rho_{max} = 0.3$, et $\rho_{min} = -0.3$)	85
3.24	Architecture cinématique de l'Orthoglide	87
3.25	Deux orientations différentes de l'Orthoglide	91
3.26	Évolution de la raideur cinématique selon l'axe Z , pour l'orientation classique et diagonale de l'Orthoglide	91
3.27	Jambe de l'Orthoglide	92
3.28	Évaluation des performances de l'Orthoglide selon l'indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$ pour les plus grands EDR cubique et cylindrique avec des butées articulaires fixées	92
3.29	Évaluation de l'indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$ pour les plus grands EDR cubique et cylindrique verticaux lorsque L_3/L varie	93
3.30	Comparaison du volume de l'EDR cubique en fonction de la méthode utilisée lorsque L_3 varie	94
3.31	La PKM UraneSX, architecture et paramétrage	95
3.32	Espace de travail de l'Orthoglide	96
3.33	Espace de travail de l'UraneSX	96
3.34	Le Y-Star	99
3.35	L'Hybrid-glide	100
3.36	Le Triaglide	100
3.37	Le 3-UPU	101
3.38	Comparaison des PKM selon l'indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$	103
3.39	Le robot Delta	104
3.40	Point P_i dont on considère la vitesse instantanée	105
3.41	EDR cubique du robot Delta	105
3.42	Détermination de $\psi_1(\mathbf{p})$	108
3.43	Photo du prototype de l'Orthoglide	113
3.44	Comparaison selon l'indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{V}$	115
3.45	Comparaison selon l'indice mixte \mathcal{I}_{mix}	115
4.1	Paramètres géométriques de la jambe	121
4.2	Modèle général d'une membrure flexible	122
4.3	Forces transmises par une jambe	123

4.4	Flexion du pied due à la force F	125
4.5	Flexion du pied due au couple T	126
4.6	Torsion du pied due au couple T	127
4.7	Traction/compression du pied due à la force F	127
4.8	Rotation de section du pied due au couple T	128
4.9	Rotation virtuelle modélisant l'effet de la tension différentielle dans les barres du parallélogramme	129
4.10	Modèle de jambe flexible	130
4.11	EDR cubique de l'Orthoglide et droite (Q_1Q_2)	138
4.12	Influence de chaque liaison élastique	139
4.13	Influence de chaque liaison élastique lorsque $L_B = 3L_{B_{initiale}}$	140
4.14	Nouveau modèle de jambe flexible	141
4.15	Influence des paramètres sur K_a	148
4.16	L_3 et L_5 ne sont pas sollicitées lorsque $\lambda = \pi/2$	149
4.17	Influence des paramètres sur K_b	150
4.18	K_b est maximum lorsque $\lambda = 0$	151
4.19	L_2 n'est pas sollicitée lorsque $\lambda = 0$	151
4.20	Porte-à-faux de L_6 par rapport à L_1	152
4.21	Condition géométrique à satisfaire pour parcourir l'EDR cubique	153
4.22	Calcul de $L_{f_{min}}$	154
4.23	Utilisation de deux actionneurs prismatiques par jambe	154
4.24	Nouveau modèle flexible pour le pied	155
4.25	Variations de K_a , K_b et Γ lorsque h_f ou b_f varient	156
4.26	Variation de κ_{33} le long de (Q_1Q_2) et influence des paramètres	159
4.27	Variation de κ_{44} en fonction de z le long de Q_1Q_2	160
4.28	Variations de $\kappa_{44}(t)/\kappa_{44_{initiale}}$	161
4.29	Variation de κ_{14} en fonction de z le long de (Q_1Q_2)	161
4.30	Variation de $\kappa_{14}(t)/\kappa_{14_{initiale}}$ en fonction des paramètres	162
4.31	Variation de κ_{15} en fonction de z le long de (Q_1Q_2)	163
4.32	Variation de $\kappa_{15}(t)/\kappa_{15_{initiale}}$	164
4.33	Variation de κ_{16} en fonction de z le long de (Q_1Q_2)	164
4.34	Variation de $\kappa_{16}(t)/\kappa_{16_{initiale}}$ en fonction des paramètres	165
4.35	Variation de κ_{45} en fonction de z le long de (Q_1Q_2)	165
4.36	Variation de $\kappa_{45}(t)/\kappa_{45_{initiale}}$ en fonction des paramètres	166
4.37	Points d'observation de κ_{44} pour une analyse paramétrique globale	168
4.38	Variations de $K_a/K_{a_{initiale}}$ en fonction de h_f , b_f et L_f	173
4.39	Variations de $K_b/K_{b_{initiale}}$ en fonction de h_f , b_f et L_f	173
4.40	Variations de $\kappa_{33}(z, t_{L_{B_3}})/\kappa_{33_{initiale}}$ et $\kappa_{44}(z, t_{L_{B_3}})/\kappa_{44_{initiale}}$ le long de (Q_1Q_2)	174
4.41	Usinage d'une rainure	175
4.42	Calcul de l'erreur de poursuite	179
4.43	Erreur de poursuite le long de Q_1Q_2	179

4.44	Erreur de poursuite le long de la rainure repérée par $x = z = 0$	180
4.45	Erreur de poursuite maximale le long d'une rainure selon l'axe Y	180
4.46	Carte de rigidité de $Kt_{1,1}$ pour $z = 0$	183
5.1	Méthode pour choisir et optimiser une PKM à translations	189
A.1	Continuum d'isotropie du Biglide	201
A.2	FAV le long du continuum d'isotropie	201
A.3	Continuum d'isotropie du Biglide 2 et du Biglide 3	202
A.4	Schéma de l'Orthoglide à l'isotropie	203
A.5	Schéma de l'Urane à l'isotropie	204
B.1	Structure simplifiée de l'Orthoglide hyperstatique lorsque seul un couple est appliqué	207
B.2	Flexibilités des parallélogrammes de la jambe 1 et de la jambe 2	207
B.3	Flexibilité en flexion différentielle du parallélogramme de la jambe 2	208

Chapitre 1

Introduction

Les machines outils actuelles ont en général une architecture cinématique sérielle, qui implique que chaque axe motorisé supporte l'axe suivant. L'Usinage à Grande Vitesse (UGV), qui est aujourd'hui une réalité industrielle, met en évidence certains des inconvénients de ces architectures : les lourdes parties à déplacer nécessitent une machine très rigide, donc largement dimensionnée, afin de limiter les problèmes de flexion, en bout de course notamment, qui nuisent à la précision de la machine. Les performances dynamiques, les vitesses d'avance et les accélérations, sont donc pénalisées par la masse élevée des éléments à déplacer.

C'est pourquoi les machines outils à cinématique parallèle (en anglais Parallel Kinematic Machine ou PKM) attirent l'attention des chercheurs et des industriels. En effet, celles-ci ont des avantages sur leurs homologues sérielles : une bonne rigidité structurelle, et des performances dynamiques très intéressantes, car les mécanismes parallèles ont une masse en mouvement faible ce qui réduit l'inertie au profit des performances dynamiques.

Aujourd'hui, le développement de l'UGV ouvre la porte du monde de l'usinage à ces architectures à cinématique parallèle qui se présentent comme des alternatives intéressantes [Treib 98], [Wenger 99], [Thusty 99], [Geldart 03]. Cependant, la conception d'une PKM est une tâche

difficile qui nécessite encore de nombreuses études avant que l'on puisse en espérer une utilisation industrielle répandue. D'ailleurs à l'heure actuelle, très peu de PKM sont réellement industrialisées, la plupart en sont encore au stade du développement. De nombreux indices de performances doivent être découverts et pris en compte afin de concevoir au mieux ces machines d'un genre nouveau. Des travaux très intéressants traitent de la conception de cas particuliers de PKM à un niveau global [Pritschow 97], [Company 02], [Pritschow 00]. Cependant peu d'entre eux proposent des outils ou des méthodes de simulation qui aident à la conception optimale de familles de PKM [Merlet 02a], [Brogardh 02]. Ce qui est bien compréhensible car ce problème est compliqué, il nécessite donc un effort de recherche collectif. Quoiqu'il en soit, il existe un besoin réel pour des outils efficaces permettant d'optimiser les PKM, de prédire leurs performances.

Cette thèse contribue à répondre à ce besoin. L'analyse cinétostatique des PKM à translations que nous allons présenter va fournir de nouveaux outils, de nouvelles méthodes, pour concevoir une famille de PKM en fonction de l'application, c'est-à-dire en fonction des performances requises pour cette application. Notre travail va s'articuler autour de deux contributions principales qui sont les chapitres 3 et 4. Le chapitre 3 va proposer une notion nouvelle, l'Espace Dextre Régulier, à partir de laquelle nous construirons de nouveaux indices de performance cinétostatiques adaptés aux PKM à translations. De nombreux exemples permettront de comprendre cette nouvelle notion et d'en illustrer l'utilité. Dans le chapitre 4, nous calculerons sous forme symbolique la matrice de compliance de l'Orthoglide, une PKM à translations munies de parallélogrammes, en fonction des paramètres géométriques. On pourra ainsi relier facilement la rigidité de la machine à ses paramètres géométriques, pour l'analyse ou l'optimisation de l'Orthoglide. Ces nouveaux outils sont utiles pour la conception de PKM comme nous l'expliquerons dans la synthèse du chapitre 5.

Mais tout d'abord, dans le chapitre 2, nous allons présenter les notions de robotique parallèle sur lesquelles s'appuient notre travail. Nous allons faire un tour d'horizon des PKM existantes en nous focalisant sur les PKM à translations. Ce chapitre sera l'occasion de présenter les concepts de la conception de PKM et les indices de performance couramment utilisés. Nous ferons aussi une revue des différents modèles de rigidité utilisés pour analyser la flexibilité des PKM. Nous aurons besoin de tout ces éléments pour situer et développer nos contributions.

Chapitre 2

Conception de machines-outils à cinématique parallèle

Ce chapitre présente les notions de robotique parallèle sur lesquelles s'appuient les travaux qui sont présentés dans ce mémoire, ainsi que les éléments bibliographiques formant le contexte dans lequel s'insèrent nos contributions. On rappelle tout d'abord des notions courantes en robotique parallèle. On présente ensuite les deux tâches importantes lors de la conception de machines parallèles : la synthèse topologique et la synthèse géométrique. L'intérêt d'appliquer les mécanismes parallèles à l'usinage est mis en évidence, et on fait l'état de l'art des machines outils parallèles existantes. On présente ensuite l'état de l'art des mécanismes parallèles à translations, sur lesquels portera notre travail. Puis on passe en revue les indices de performance utilisés en robotique parallèle et on montre qu'ils ne répondent pas parfaitement à la conception de machines parallèles. Enfin, on présente l'état de l'art des méthodes d'analyse de rigidité des manipulateurs parallèles. L'une de ces méthodes sera utilisée dans le chapitre 4 pour l'analyse paramétrique de rigidité d'une machine parallèle à translations : l'Orthoglide.

2.1 Notions importantes en robotique parallèle

Le paragraphe 2.1 présente les notions importantes utilisées en robotique parallèle. Il existe sur ce sujet trois livres de référence : [Merlet 00], [Tsai 99], [Angeles 2003].

2.1.1 Préliminaires

Les premiers mécanismes (ou manipulateurs) parallèles construits sont un simulateur de vol [Stewart 65] et une machine pour tester les pneus [Gough 62]. Un investigateur a cependant apporté en 2003 de nouvelles informations sur l'origine des manipulateurs parallèles, dans une revue online très bien documentée [Bonev Web 2]. Le premier manipulateur parallèle inventé mais non construit daterait de 1932 [Gwinnett 31]. C'était un projet de plate-forme mobile destinée à un cinéma "dynamique", comme au Futuroscope de Poitiers, près de Châtelleraut dans la Vienne. Aujourd'hui, on trouve de nombreuses utilisations des mécanismes parallèles dans l'industrie : pick-and-place, simulateurs de vol, machines-outils, micro-positionnement.

La plate-forme mobile d'un mécanisme parallèle sur laquelle est placé l'effecteur est connectée au bâti par plusieurs chaînes cinématiques, appelées jambes, qui sont montées en parallèle. En général, les jambes sont soit télescopiques, c'est-à-dire de longueur variable, soit de longueur fixe et c'est leur extrémité qui est mobile (Fig. 2.1). Sur cette figure, les mécanismes ont chacun deux jambes. Celles-ci sont constituées de pièces mobiles les unes par rapport aux autres appelées membrures.

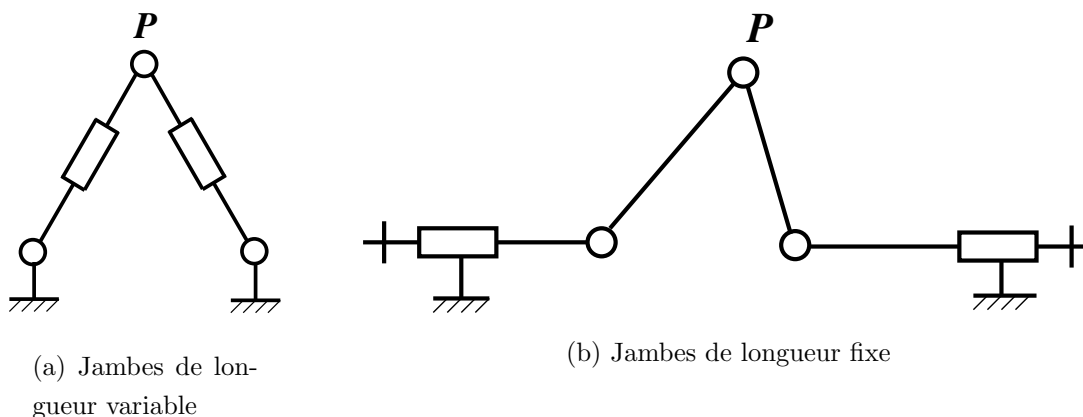


FIG. 2.1 – Mécanismes parallèles à jambes de longueur variable ou fixe

On appelle configuration articulaire d'un mécanisme parallèle l'ensemble des coordonnées liées aux articulations motorisées. Pour les deux mécanismes de la Fig. 2.1, les articulations motorisées sont les deux liaisons prismatiques.

On appelle configuration de l'outil l'ensemble des coordonnées permettant de définir la position et l'orientation de l'outil. Sur la Fig. 2.1, la configuration de l'outil est définie par le couple de coordonnées Cartésiennes (x, y) qui détermine la position de l'outil.

L'espace des configurations d'un mécanisme parallèle est l'ensemble des valeurs que peuvent prendre les coordonnées articulaires passives et actives, qui doivent satisfaire les équations traduisant la fermeture des chaînes de solides.

2.1.2 La matrice Jacobienne (cinématique)

La détermination des modèles cinématiques des manipulateurs parallèles est à elle seule un thème de recherche en robotique parallèle. En effet, chaque famille de manipulateurs nécessite une approche différente pour déterminer son modèle cinématique. En général, pour un manipulateur parallèle on arrive à établir une relation du type :

$$\mathbf{A}\mathbf{t} = \mathbf{B}\dot{\boldsymbol{\rho}}$$

où $\dot{\boldsymbol{\rho}}$ est le vecteur des vitesses articulaires, \mathbf{t} est le vecteur des vitesses Cartésiennes et \mathbf{J} est la matrice Jacobienne du manipulateur. Lorsque \mathbf{A} n'est pas singulière, elle est inversible et on peut déterminer la matrice Jacobienne du manipulateur :

$$\mathbf{J} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$$

La détermination de la matrice Jacobienne revient donc à déterminer les matrices \mathbf{A} et \mathbf{B} . La matrice Jacobienne d'un manipulateur parallèle représente la transformation linéaire entre les vitesses Cartésiennes de la plate-forme mobile et les vitesses articulaires des liaisons actionnées :

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{t}$$

2.1.3 La dextérité

La dextérité est un concept très important. Elle permet de caractériser les capacités d'un manipulateur à effectuer avec précision des mouvements de faible amplitude [Gosselin 98]. En effet, étant donné une certaine précision des actionneurs, la précision du mouvement obtenu à l'organe terminal dépendra des paramètres géométriques du manipulateur ainsi que de sa configuration. La dextérité est donc une propriété locale du manipulateur. Elle évolue à l'intérieur de l'espace de travail. On peut établir une expression de la dextérité à partir de l'équation de vitesse du manipulateur $\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{t}$. La dextérité est en effet définie comme la qualité de la transformation linéaire caractérisée par la matrice Jacobienne. On utilise le conditionnement

de la Jacobienne pour mesurer cette qualité. Mathématiquement, on définit le conditionnement $\kappa(\mathbf{M})$ d'une matrice \mathbf{M} de la façon suivante :

$$\kappa(\mathbf{M}) = \|\mathbf{M}\| \cdot \|\mathbf{M}^{-1}\|$$

Une matrice singulière aura un conditionnement qui tend vers l'infini alors qu'une matrice parfaitement conditionnée aura un conditionnement de 1.

On utilise souvent l'inverse du conditionnement qui est compris entre 0 et 1, et qui est plus facile à calculer. On dit qu'un manipulateur est isotrope si sa matrice jacobienne est parfaitement conditionnée en au moins une configuration. Une telle configuration sera appelée configuration isotrope.

2.1.4 Les Facteurs d'Amplification de Vitesse

Les Facteurs d'Amplification de Vitesse (ou FAV) d'un manipulateur parallèle sont définis à partir des ellipsoïdes de manipulabilité en vitesse [Yoshikawa 85]. Ces ellipsoïdes sont eux-mêmes définis à partir de la matrice jacobienne inverse du manipulateur, \mathbf{J}^{-1} .

Physiquement, les FAV ne représentent pas les rapports entre les vitesses des liaisons cinématiques actionnées et les vitesses de la plate-forme mobile du manipulateur, mais ils en donnent une bonne approximation.

Les racines carrées des valeurs propres de $(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)^{-1}$ sont notées γ_i . Ce sont les longueurs des demi axes de l'ellipsoïde. Les FAV sont tels que :

$$\lambda_i = 1/\gamma_i$$

Les Facteurs d'Amplification des Efforts (ou FAE) sont l'inverse des FAV et représentent une approximation du rapport entre les efforts disponibles au niveau des liaisons cinématiques actionnées et les efforts disponibles au niveau de la plate-forme mobile. Les FAE, notés λ'_i , sont égaux aux longueurs des demi-axes de l'ellipsoïde de manipulabilité. Ils sont tels que :

$$\lambda'_i = \gamma_i$$

Parce qu'ils sont définis à partir de la matrice Jacobienne, elle-même définie à partir des paramètres géométriques du manipulateur et de la configuration, les FAV dépendent des paramètres géométriques et de la position Cartésienne.

Sur la Fig. 2.2, on illustre la dépendance des FAV avec les coordonnées Cartésiennes. On montre l'ellipsoïde de manipulabilité d'un manipulateur plan dans deux configurations

différentes : dans la configuration quelconque les demis axes de l'ellipsoïde sont de dimensions différentes ; et à l'isotropie l'ellipsoïde est un cercle car les demis axes (et par conséquent les FAV) sont égaux : $\lambda_1 = \lambda_2$, et on a même dans ce cas précis : $\lambda_i = 1$.

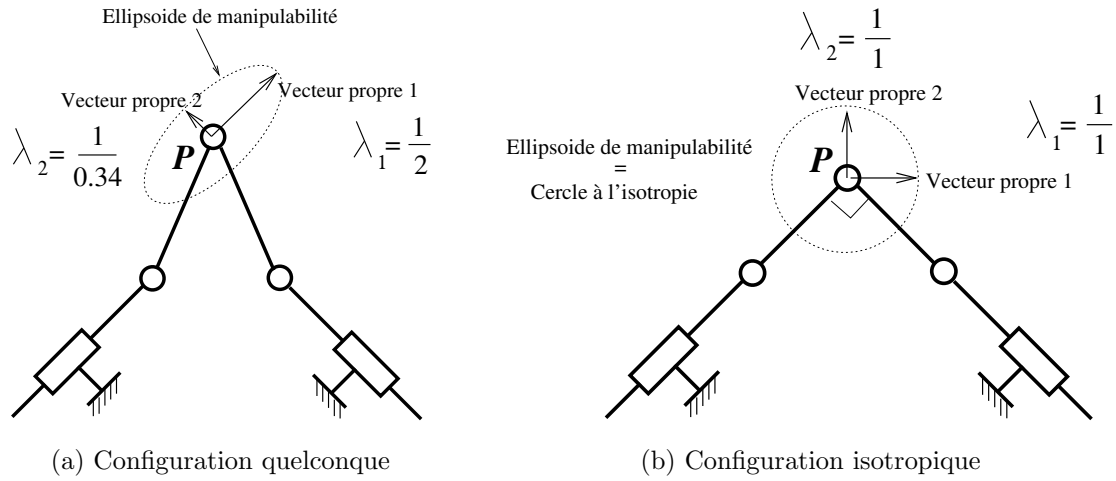


FIG. 2.2 – Manipulabilité d'une PKM plane dans deux configurations différentes

2.1.5 Singularités

2.1.5.1 Les singularités classiques

Lorsque $\det(\mathbf{A})$ ou $\det(\mathbf{B})$ s'annule, on dit que le manipulateur est en singularité. Lorsque $\det(\mathbf{B}) = 0$, c'est une singularité dite sérielle ou de type I [Gosselin 90c]. Ce type de singularité correspond aux frontières de l'espace atteignable par le manipulateur [Merlet 00]. Sur la Fig. 2.3, on a représenté une singularité sérielle d'une PKM plane à deux translations. La flèche indique la direction le long de laquelle le mouvement est impossible.

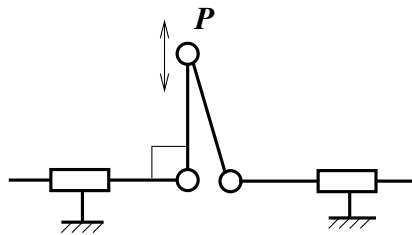


FIG. 2.3 – Singularité sérielle

Lorsque $\det(\mathbf{A}) = 0$, c'est une singularité dite parallèle ou de type II [Gosselin 90c]. Ce type de singularité correspond aux configurations dans lesquelles la rigidité du mécanisme est perdue localement. Sur la Fig. 2.4 on a représenté une singularité parallèle, la flèche indique la direction le long de laquelle la rigidité est perdue, c'est-à-dire qu'un mouvement infinitésimal est possible.

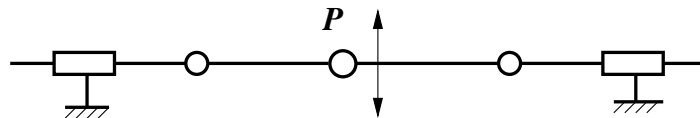


FIG. 2.4 – Singularité parallèle

L'analyse de ce type de singularités est plus complexe et fait encore l'objet de recherches. Pour mettre en évidence les singularités d'un manipulateur parallèle, il est possible d'utiliser une approche algébrique à partir de la matrice Jacobienne, ou une approche géométrique [Hunt 78], [Merlet 89], [Zlatanov 94] en utilisant la géométrie des droites.

Une troisième sorte de singularité, dite singularité architecturale, peut apparaître pour des dimensions particulières des membrures d'un mécanisme parallèle. Sur la Fig. 2.5 par exemple, il n'est pas possible de contrôler la position du point P , pour cette configuration articulaire particulière (les liaisons actionnées sont les liaisons prismatiques), parce que les deux barres reliées aux actionneurs prismatiques ont même longueur. On peut bien sûr éviter ces singularités, si l'on connaît le risque, en déterminant les configurations articulaires critiques qu'il faut éviter. Lorsqu'on se trouve en une singularité architecturale, les équations de positionnement dégénèrent [Ma91], c'est-à-dire qu'il existe une infinité de solutions au problème géométrique direct : pour une configuration articulaire donnée, il existe une infinité de positions Cartésiennes solutions (Fig. 2.5).

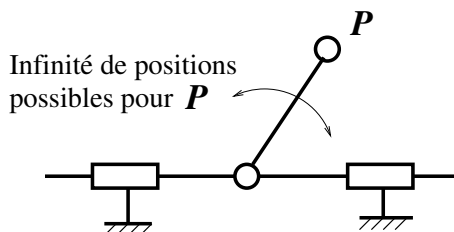


FIG. 2.5 – Singularité architecturale

Lors de la conception d'une PKM, il est important de déterminer ses configurations singulières. En effet au voisinage de celles-ci, les performances de la machine se détériorent :

- Au voisinage des singularités sérielles, il n'est pas possible de déplacer l'outil dans certaines directions (Fig. 2.3) ;
- Au voisinage des singularités parallèles, on peut déplacer l'outil bien que les articulations motorisées soient bloquées (Fig. 2.4). Ces singularités peuvent exister à l'intérieur de l'espace de travail et sont gênantes pour la planification de trajectoires. En ces points, les efforts dans les articulations augmentent, ce qui peut endommager la structure. De plus, la rigidité du mécanisme diminue et peut provoquer des mouvements non contrôlés de l'outil ;
- Si l'on se trouve en singularité architecturale, la position de l'outil est incontrôlable, ce

qui pose bien évidemment un problème (Fig. 2.5).

2.1.5.2 Les singularités de contrainte

Plus récemment, un nouveau type de singularité a été mis en évidence : les singularités de contrainte ou *Constraint singularities* [Zlatanov 01], aussi appelées singularités internes [Krut 03]. [Zlatanov 02] est un rapport online qui décrit le phénomène avec des animations pertinentes. Ces singularités se produisent pour des mécanismes parallèles possédant moins de 6 degrés de liberté, lorsqu'à la fois le mécanisme entier et la plate-forme mobile gagnent un degré de liberté. D'après la classification proposée par [Zlatanov 94], ce type de singularité est toujours de type IIM (*Increased Instantaneous Mobility*). [Zlatanov 02] montre que les singularités IIM sont des singularités dans l'espace des configurations du mécanisme, appelé *Configuration space* (voir paragraphe 2.1.1).

Voyons un exemple : la Fig. 2.6 représente un mécanisme à 4 barres dans une configuration quelconque (à gauche) et en singularité de contrainte (à droite). La plate-forme mobile dont on étudie le mouvement est appelée *coupleur*. Il y a un seul actionneur rotatif, donc on a un mécanisme parallèle à 1 degré de liberté (DDL) en rotation. Sur la figure de droite, les axes des liaisons pivot sont tous alignés. Dans cette configuration, il est possible de déplacer le coupleur à la fois en translation verticale et à la fois en rotation autour de n'importe quel point de (Δ) . On a donc localement un mécanisme à 2 DDL : 1 rotation, 1 translation. On se trouve en singularité de contrainte puisque l'on gagne 1 DDL.

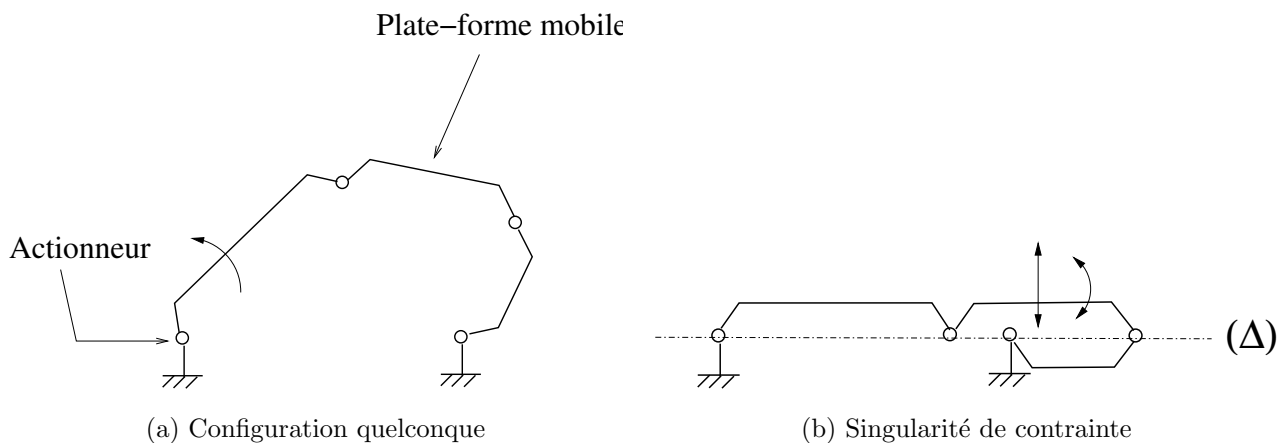


FIG. 2.6 – Singularité de contrainte d'un mécanisme 4 barres

Le problème posé aux PKM par les singularités de contrainte, outre la possible perte de rigidité au passage d'une telle singularité, comme pour les singularités parallèles, est bien sûr la modification locale des DDL de la machine. Si l'on veut une PKM à 3 DDL en translation, il n'est pas envisageable qu'elle acquière un DDL en rotation en cours d'usinage, même localement. Il faut donc à tout prix éviter ces singularités.

Il arrive que la modification du nombre et du type de DDL ne soit pas seulement locale : dans [Zlatanov 02], on montre l'exemple du mécanisme 3-URU *DYMO* (pour *Double-Y Multi-Operational mechanism*, voir Fig. 2.7) qui lorsqu'il traverse des singularités de contrainte peut se comporter de différentes façons : mode translationnel (3 DDL en translation), mode sphérique (3 rotations autour d'un point), mode plan (2 translations dans un plan, 1 rotation orthogonale au plan), mode mixte (2 rotations, 1 translation), mode bloqué (aucun déplacement de la plate-forme).

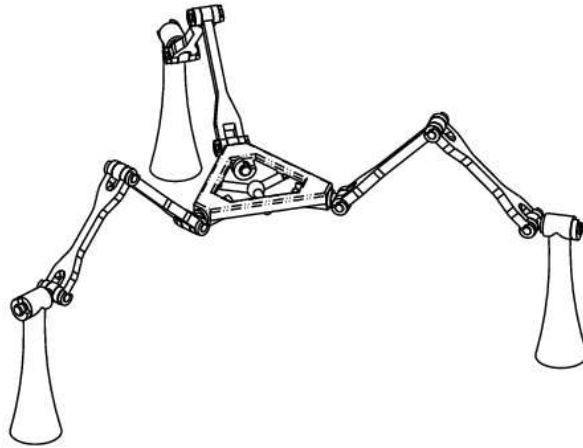


FIG. 2.7 – Mécanisme 3-URU *DYMO*

Remarque : Nous allons voir dans le paragraphe 2.1.7 que la détermination de l'espace de travail des mécanismes parallèles est un thème de recherches, car les problèmes à surmonter varient suivant l'architecture. De même, la détermination des singularités pour des familles de mécanismes parallèles est un thème de recherches. Par exemple dans [Krut 03] on présente une méthode de détermination de toutes les singularités possibles (singularités de type I, II, singularités de contrainte) pour une famille de manipulateurs à 3 DDL en translation et 1 DDL en rotation.

2.1.6 Modes d'assemblage et de fonctionnement

Une singularité sérielle (resp. parallèle) est associée à un changement de mode de fonctionnement (resp. de mode d'assemblage) [Chablat 98]. Sur la Fig. 2.8, le manipulateur possède quatre modes de fonctionnement pour une position donnée du point P : l'articulation de chaque jambe peut être à gauche ou à droite de la position intermédiaire correspondant à la singularité sérielle.

Ce manipulateur possède aussi deux modes d'assemblage pour une configuration articulaire donnée : l'outil peut être au-dessus ou au-dessous de la droite horizontale qui correspond à la singularité parallèle (Fig. 2.9). Le choix du mode d'assemblage ou de fonctionnement influence le comportement cinétostatique du mécanisme de manière significative [Chablat 98a].

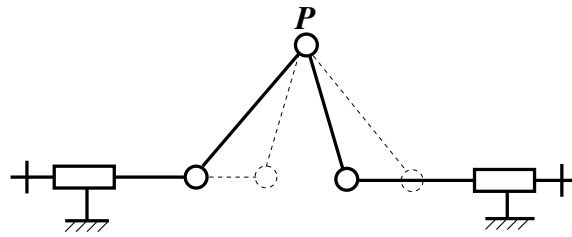


FIG. 2.8 – Modes de fonctionnement

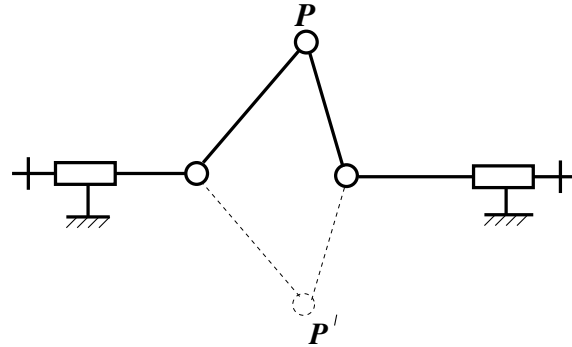


FIG. 2.9 – Modes d'assemblage

2.1.7 Espace de travail

La détermination de l'espace de travail des manipulateurs parallèles est un point important pour la conception de PKM. En effet, le faible volume de l'espace de travail par rapport à l'encombrement est un des principaux défauts des manipulateurs parallèles.

Différentes projections de l'espace de travail existent pour les manipulateurs parallèles [Merlet 98] :

1. L'espace de travail maximal, qui correspond à l'ensemble des positions accessibles par la plate-forme mobile pour au moins une orientation de celle-ci ;
2. L'espace de travail dextre, qui correspond à l'ensemble des positions accessibles par la plate-forme mobile pour toutes les orientations de celle-ci ;
3. L'espace de travail à orientation constante, qui correspond à l'ensemble des positions accessibles par la plate-forme mobile pour une orientation donnée de celle-ci.

Dans cette thèse, nous nous intéressons aux PKM à translations, pour lesquelles les trois projections de l'espace de travail sont équivalentes puisque l'orientation de la plate-forme mobile ne varie pas.

Les méthodes développées pour la détermination de l'espace de travail des mécanismes sériels ne sont pas directement applicables. Aussi, des méthodes particulières, algébriques et géométriques, ont été mises au point. Chaque méthode ou presque est spécifique à une architecture particulière. Des algorithmes géométriques sont par exemple présentés dans [Merlet 98] pour déterminer les différentes projections de l'espace de travail pour des manipulateurs pa-

parallèles plans.

Les méthodes géométriques [Gosselin 90b], [Merlet 00], [Bonev 02] permettent de calculer facilement la frontière de l'espace de travail. Elles peuvent intégrer les contraintes liées aux limites articulaires et aux collisions entre membrures. Cependant la reconstruction totale de l'espace de travail est difficile.

Les méthodes algébriques [Jo 89], [Haugh 95] sont plus difficiles à appliquer car elles augmentent la dimension du problème en introduisant des variables supplémentaires. Elles consistent à résoudre un problème d'optimisation en introduisant des pénalités aux frontières.

Les singularités sérielles sont les frontières de l'espace atteignable [Merlet 00]. Des singularités parallèles peuvent se trouver dans l'espace atteignable ce qui peut poser problème car en ces points la rigidité devient presque nulle selon certaines directions (voir paragraphe 2.1.5).

2.1.8 Manipulateurs pleinement parallèles

Un manipulateur pleinement parallèle est un manipulateur qui possède autant de jambes que de degrés de libertés, et un seul actionneur par jambe. La plate-forme hexapode de Gough-Stewart est un exemple de mécanisme pleinement parallèle [Stewart 65]. Une hexapode est munie d'une plate-forme mobile reliée au bâti par 6 chaînes sérielles de type *UPS* ($U = \text{Universal joint}$, i.e. cardan, $P = \text{Prismatique}$, $S = \text{Sphérique}$) montées en parallèle (Fig. 2.10).



FIG. 2.10 – Mécanisme pleinement parallèle de type hexapode

2.1.9 Redondance

Il existe deux sortes de redondance pour les mécanismes parallèles [Krut 03]. La redondance d'actionnement signifie qu'à une force donnée à exercer par la plate-forme mobile, correspond une infinité de forces possibles pour les moteurs, et la redondance cinématique signifie qu'à une

vitesse donnée de la plate-forme mobile correspond une infinité de vitesses pour les moteurs (Fig. 2.11). Sur les figures, les liaisons actionnées sont les liaisons prismatiques.

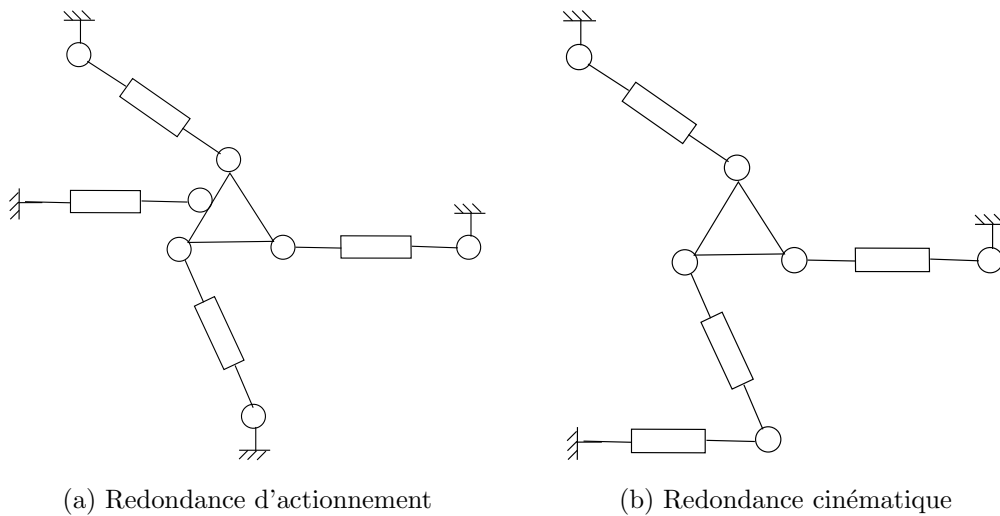


FIG. 2.11 – Deux sortes de redondance pour les mécanismes parallèles

Le concept de redondance peut par exemple être employé pour franchir des singularités et obtenir ainsi de forts débattements angulaires [Krut 03]. C'est par exemple le cas du mécanisme parallèle Archi développé au LIRMM de Montpellier (Fig. 2.12). La plate-forme mobile possède 3 DDL mais 4 jambes actionnées. Nous reviendrons sur ce point dans le paragraphe 2.2.4.3.

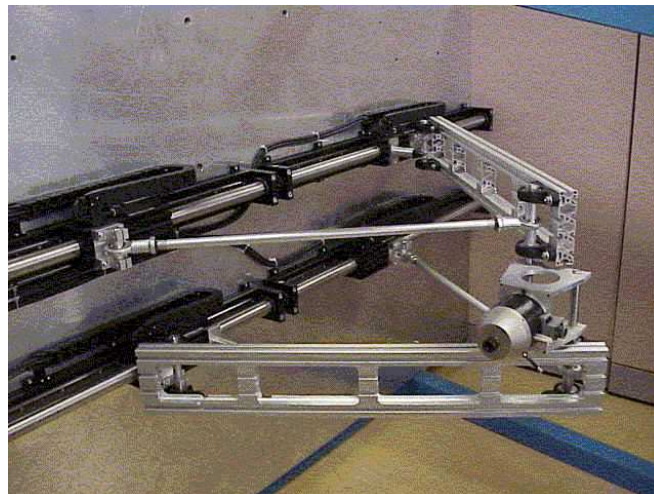


FIG. 2.12 – Mécanisme parallèle Archi

2.1.10 Manipulateurs hybrides

Un manipulateur hybride est un manipulateur parallèle composé de l'association en série d'un mécanisme à cinématique parallèle et d'un mécanisme à cinématique sérielle. Ce type de manipulateur peut permettre de bénéficier d'un grand espace de travail en translation ou

en orientation, caractéristique propre aux mécanismes sériels. D'autre part, il peut également permettre de bénéficier des bonnes performances des manipulateurs parallèles en terme de rigidité et de dynamique. Nous présenterons un exemple de manipulateur parallèle hybride dans le paragraphe 2.2.2.5.

2.2 Application des mécanismes parallèles à l'usinage

2.2.1 Limites des machines outils classiques

La plupart des machines outils possèdent une architecture sérielle ou arborescente, c'est-à-dire que chaque axe doit déplacer et supporter l'autre. Sur la Fig. 2.13, on voit par exemple que l'axe X est supporté par l'axe Y , lui-même supporté par le bâti de la machine, qui supporte l'axe Z . L'avantage de cette structure est que les axes du repère lié à la machine et ceux du repère lié à la pièce peuvent facilement être mis en relation au moyen d'expressions mathématiques simples, ce qui facilite la programmation des trajectoires d'usinage.

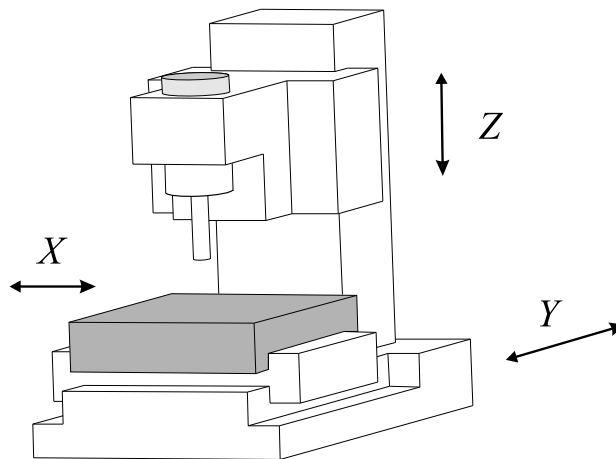


FIG. 2.13 – Machine outil sériele

Remarque : On a dans cet exemple une structure sériele de type main droite / main gauche ou arborescente : les mouvements de l'outil et de la pièce sont générés par deux chaînes cinématiques indépendantes (la table et la broche).

Les contraintes économiques actuelles imposent de produire plus vite et mieux. Les machines outils de conception récente suivent cette évolution, et on constate que leurs performances en précision, en vitesse se sont nettement améliorées, grâce aux avancées technologiques des constructeurs, et à l'amélioration des performances de certains composants (moteurs linéaires, électrobroches à paliers hydrostatiques, roulements spéciaux, commandes numériques plus performantes, etc...). Cependant, l'architecture sériele employée pour la cinématique de ces machines montre des limites :

1. Les machines deviennent très lourdes et très encombrantes, car l'augmentation des vitesses de broche et des avances exigent un dimensionnement généreux, en accord avec la rigidité requise ;
2. La masse à déplacer sur chaque axe devient donc importante, ce qui pose des problèmes de flexion en bout de course, et nuit à la précision ainsi qu'aux performances dynamiques.

Les PKM représentent donc des alternatives intéressantes en termes de performances dynamiques, et nous allons donc présenter maintenant un état de l'art des PKM industrialisées existantes.

2.2.2 État de l'art des PKM possédant plus de 3 DDL

2.2.2.1 Préambule

Pour organiser cet état de l'art, nous allons rassembler les PKM au sein de 4 familles : les PKM dont la longueur des jambes varie (les liaisons actionnées sont prismatiques et non-fixées sur le bâti), les PKM dont la longueur des jambes est fixe (les liaisons actionnées sont fixées sur le bâti), les PKM redondantes et les PKM hybrides. Au sein des deux premières familles, on séparera les différentes PKM en fonction de leurs DDL. La famille des PKM à 3 DDL sera présentée dans le paragraphe suivant afin de mieux la détailler.

2.2.2.2 PKM dont la longueur des jambes varie

Un problème de ces PKM est que les actionneurs sont souvent situés sur des parties mobiles, ce qui augmente l'inertie de celles-ci, et rend difficile l'utilisation de moteurs linéaires. D'autre part, lorsque les liaisons actionnées sont des vis à billes, la dilatation de l'axe causée par l'échauffement provoqué par le frottement avec les billes pose un problème de précision.

• À 6 DDL

C'est à cette famille qu'appartiennent les PKM de type hexapode à 6 DDL. On recense la Variax de Giddings and Lewis (Fig. 2.14), la CMW300 de la Compagnie Mécanique des Vosges, la Tornado 2000 de Hexel, la Mikromat 6X de Mikromat/Fraunhofer IWU, l'Hexapode OKUMA et l'Hexapode G500 de Geodetic. Avec 6 DDL, la rotation autour de l'axe de la broche est inutile, il y a donc redondance d'actionnement.

La Variax possède un grand volume de travail ($700\text{mm} \times 700\text{mm} \times 750\text{mm}$). Cependant, les performances de la machine ne sont pas les mêmes dans tout l'espace de travail.



FIG. 2.14 – PKM Variax de Giddings and Lewis

La machine 6X de Mikromat (Fig. 2.15), conçue pour l'UGV 5 axes de pièces en acier et fonte, est assez lente (avances 30 m.min^{-1} , accélérations 10 m.s^{-2}) comparée à ses concurrentes à structure parallèle ou même sérielle. De plus, son encombrement est trop important par rapport à son espace de travail utile (encombrement : $6200\text{mm} \times 5400\text{mm} \times 4000\text{mm}$, espace de travail : $630\text{mm} \times 630\text{mm} \times 630$), et lorsque l'on s'éloigne du centre de l'espace de travail, les capacités d'orientation de la tête diminuent jusqu'à atteindre seulement ± 15 degrés.

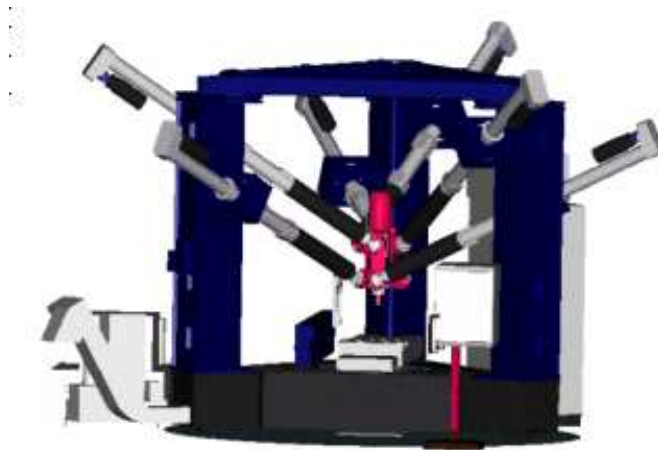


FIG. 2.15 – PKM 6X de Mikromat

L'architecture cinématique de type hexapode étant la première à avoir été utilisée industriellement, sa conception a fait l'objet de nombreux travaux, ce qui explique que son application à l'usinage ait été la première à avoir été étudiée par les constructeurs. Les 6 jambes des hexapodes sont en général faites de composants identiques, ce qui peut aider à diminuer le coût de la machine.

L'Hexapode CMW300 est prévue pour être montée sur une aléreuse fraiseuse, ce qui permet de compenser un des inconvénients des PKM : la petite taille de l'espace de travail. La structure



FIG. 2.18 – PKM Seyanka de Tekniker

2.2.2.3 PKM dont la longueur des jambes est fixe

Dans cette famille, ce sont les pieds des jambes qui se déplacent grâce à des liaisons prismatiques ou rotatives fixées sur le bâti. Cette solution est intéressante pour les PKM car le placement des actionneurs sur le bâti permet de réduire la masse en mouvement. D'autre part ce type d'architecture favorise l'utilisation de moteurs linéaires pour augmenter les performances dynamiques.

- À 6 DDL

Un représentant de cette famille à 6 DDL est la PKM de type hexaglide de l'ETH de Zürich dont les liaisons prismatiques sont toutes coplanaires et parallèles (Fig. 2.19). C'est la version "jambes de longueur fixe" de la PKM hexapode. Il est possible d'utiliser des moteurs linéaires.



FIG. 2.19 – Machine Hexaglide

Cette architecture particulière permet d'obtenir une longue course selon l'axe des liaisons

actionnées, ce qui est intéressant pour l'usinage de pièces longues. Ce principe de conception est proche de celui employé par CMW pour l'Hexapode 300.

Différentes architectures de type hexaglide existent. On recense la machine HexaM qui possède trois paires de liaisons prismatiques parallèles montées sur un cône vertical [Toyoama 98] (Fig. 2.20). C'est une machine rapide (avances jusqu'à 100 m.min^{-1} , accélérations de 10 à 20 m.s^{-2}) et précise.

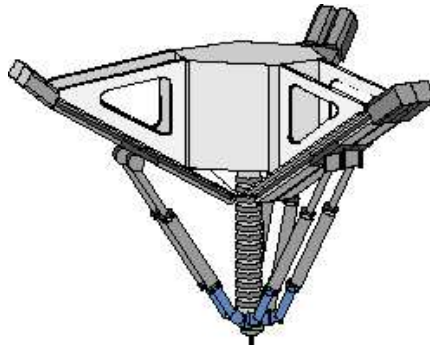
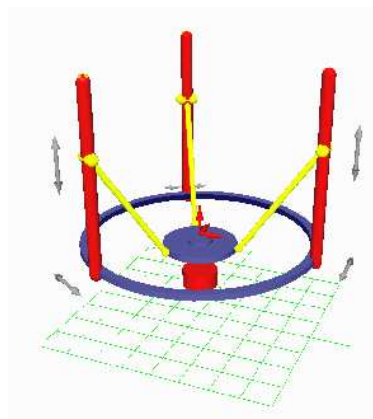


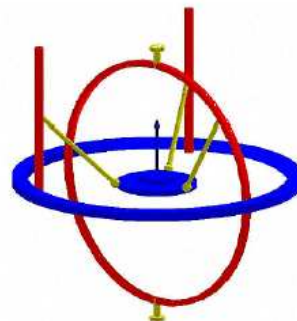
FIG. 2.20 – Machine HexaM

2.2.2.4 PKM redondantes

La machine coréenne Eclipse 1 de Sena Technologies est une PKM 6 axes à 8 actionneurs donc à redondance d'actionnement [Ryu 98] (Fig. 2.21). Cette PKM est basée sur un mécanisme original qui autorise une rotation continue de la plate-forme de 360 degrés autour de l'axe Z , et un débattement de ± 90 degrés autour des axes X et Y (Fig. 2.22). Une version 2 de l'Eclipse est présentée dans [Kim 02]. Dans cette version, les trois rotations ont un débattement angulaire de 360 degrés (Fig. 2.21).



(a) Eclipse 1



(b) Eclipse 2

FIG. 2.21 – PKM Eclipse 1 et 2

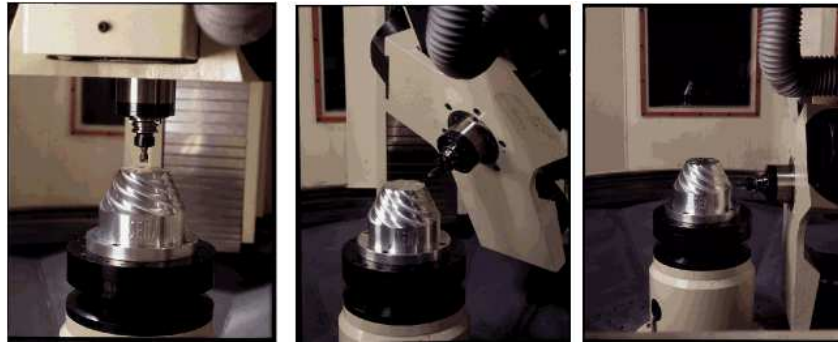


FIG. 2.22 – Débattement de ± 90 degrés pour l'Eclipse 1

2.2.2.5 PKM hybrides

La machine Hexabot de la société Hexel est une plateforme hexapode qui sert de support mobile de pièce. Elle se combine à une fraiseuse coudée fixe pour former une machine parallèle 5 axes d'architecture main droite/main gauche (Fig. 2.23). Les performances ne sont pas époustouflantes, mais l'intérêt est de réutiliser un vieux matériel : la fraiseuse coudée, souvent utilisée par des artisans. On peut utiliser l'ensemble pour du prototypage rapide de moules, ou pour tester des programmes CN.



FIG. 2.23 – Machine Hexabot

Il existe des PKM à architecture hybride à 5 DDL comme le Tricept de Neos Robotics [Neumann 88] (Fig. 2.24). Cette PKM possède un poignet sériel à deux rotations monté sur un tripode à cinématique parallèle à jambes de longueur variable, avec une jambe passive. Ce porteur parallèle à jambe passive possède les trois DDL des coordonnées sphériques (2 rotations, 1 translation) [Siciliano 99]. Le Tricept, associé à la CN Sinumerik 840D de Siemens, atteint des vitesses allant de $24,000$ à $30,000 \text{ tr.min}^{-1}$ pour la broche, 90 m.min^{-1} pour les avances et des accélérations de 20 m.s^{-2} . Le Centre d'Usinage à architecture modulaire est utilisé pour des opérations d'usinage à grande vitesse tandis que le mécanisme seul est utilisé pour du soudage par friction par exemple.



(a) Mécanisme du Tricept



(b) Centre d'Usinage 5 axes

FIG. 2.24 – Mécanisme du Tricept et Centre d'Usinage 5 axes

L'Orthoglide 5 axes utilise par contre un porteur parallèle de type Delta linéaire sur lequel est monté un poignet parallèle sphérique à 2 DDL de type oeil agile [Gosselin 96] (Fig. 2.25).

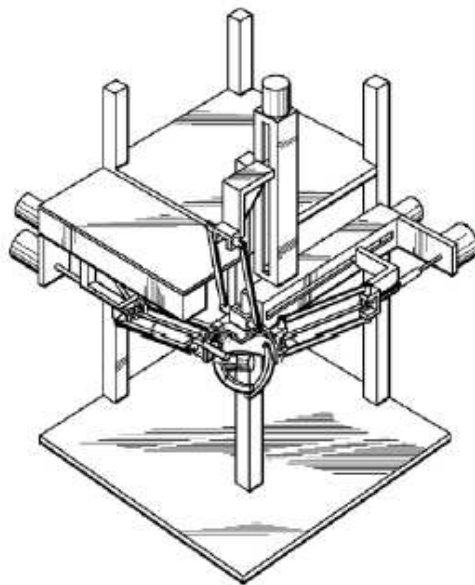


FIG. 2.25 – Orthoglide 5 axes

La tête d'usinage Sprint Z3 de DS Technologies possède 3 DDL (2 rotations, 1 translation) et est destinée à l'industrie aéronautique (Fig. 2.26). Elle est montée sur une structure sérielle de type portique à deux translations, dont l'une peut avoir une course de 60 m. Trois dispositifs de guidage linéaire par vis à billes (compatibles avec la technologie des moteurs linéaires) sont disposés à 120 degrés dans le corps cylindrique formant la structure. Ces dispositifs de guidage sont constitués de chariots accrochés à des bras pivotants, qui sont liés à l'électrobroche avec des cardans.



FIG. 2.26 – PKM Sprint Z3

La machine Hermes de Fatronik est quant à elle une évolution de la tête Sprint Z3 (Fig. 2.27). Elle aussi peut se monter sur une structure porteuse sérielle à deux translations afin d'accroître son volume de travail.



FIG. 2.27 – PKM Hermes de Fatronik

La PKM Ulyses ZAB possède une translation et deux rotations. Elle est également développée par Fatronik, c'est un tripode inspiré du Tricept de Neos Robotics (présence d'une jambe passive contraignant les DDL de la broche) et monté sur un porteur sériel à 1 translation verticale (Fig. 2.28).

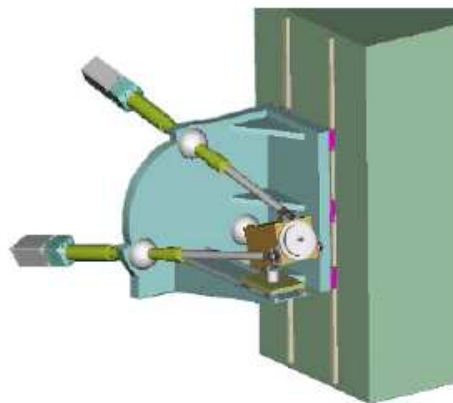


FIG. 2.28 – PKM Ulyses ZAB de Fatronik

2.2.3 Les PKM à 3 DDL en translation

2.2.3.1 Préambule

La plupart des PKM à 3 DDL sont des PKM spatiales à translations. Il se trouve qu'il en existe un grand nombre car de nombreuses tâches d'usinage nécessitent seulement 3 DDL en translation : rainurage, perçage-lamage-taraudage, contournage. L'application des manipulateurs parallèles à translations (ou TPM, pour *Translational Parallel Manipulator*) à l'usinage revêt donc une grande importance. C'est pourquoi dans cette thèse nos contributions portent sur cette famille, i.e. les PKM spatiales basées sur des mécanismes parallèles à translations.

Nous allons présenter non seulement les PKM à translations, mais aussi de nombreux mécanismes parallèles à translations. En effet, même si ces mécanismes n'ont pas été développés spécialement pour l'usinage, les contributions de cette thèse peuvent leur être appliqués directement. Afin de mettre en évidence la genericité de nos contributions, nous devons donc présenter la totalité de leur champ d'application.

La contribution la plus exhaustive consacrée aux TPM est [Kong 03]. Cette thèse présente (entre autres) l'analyse cinématique et la synthèse structurelle de tous les TPM. Nous aborderons plus loin la synthèse structurelle de PKM. Deux familles très intéressantes de TPM sont mises en évidence dans [Kong 03], les TPM linéaires et les TPM linéaires isotropes. Nous allons donc présenter ces deux familles. Puis nous présenterons des TPM dont la longueur des jambes varie. Enfin nous détaillerons la famille des TPM de type Delta qui est intéressante pour l'usinage.

2.2.3.2 Les TPM linéaires

Les TPM linéaires ou LTPM (*Linear Translational Parallel Manipulators*) sont des TPM dont le modèle géométrique direct peut être résolu à partir d'un système d'équations linéaires [Kong 02b]. C'est-à-dire que les équations d'entrée/sortie sont linéaires. La particularité des LTPM est donc que leur matrice Jacobienne est constante. Par conséquent, les performances cinéto-statiques sont constantes et la programmation de la commande numérique est très simple.

Une famille particulière de LTPM ne possédant ni singularités de contrainte, ni singularités parallèles est décrite dans [Kong 02b] par 4 conditions topologiques et géométriques. Nous ne les rappelons pas ici car leur exposé est long, et renvoyons le lecteur à [Kong 02b]. L'intérêt de ces conditions est que leur compréhension ne nécessite presque aucun outil mathématique.

Les LTPM proposés dans [Kong 02b] sont isostatiques, c'est-à-dire que chaque jambe possède 5 DDL et supprime seulement 1 DDL en rotation de la plate-forme mobile, et leurs liaisons

actionnées sont prismatiques. Un membre de cette famille est présenté sur la Fig. 2.29.

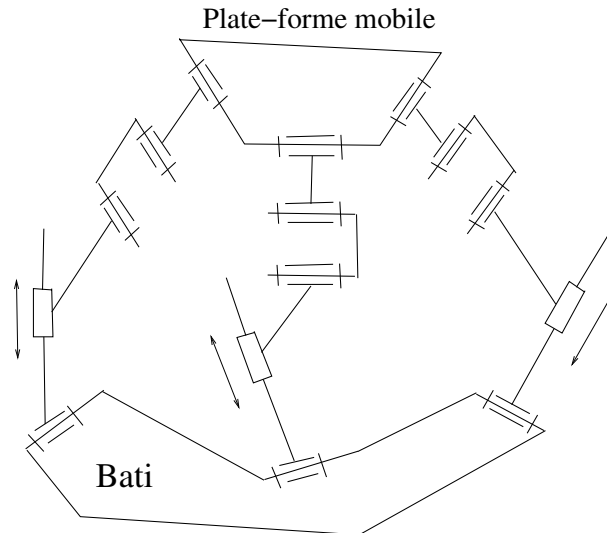


FIG. 2.29 – LTPM proposé dans [Kong 02b]

2.2.3.3 Les TPM linéaires isotropes

Les LTPM isotropes sont des cas particuliers de LTPM. Leur matrice Jacobienne est égale à l'identité. Les LTPM isotropes peuvent être isostatiques ou hyperstatiques. Sur la Fig. 2.30, on présente une des architectures de LTPM isotrope proposées dans [Kong 02a]. Chaque jambe est de type PRRR, c'est-à-dire qu'elle est composée de l'association en série d'une liaison prismatique actionnée, et de trois liaisons pivot dont les axes sont parallèles à celui de l'actionneur. Chaque rotation de la plate-forme est bloquée deux fois car chaque jambe possède 4 DDL, et bloque par conséquent deux rotations de la plate-forme mobile. Ce prototype est donc hyperstatique d'ordre 3.

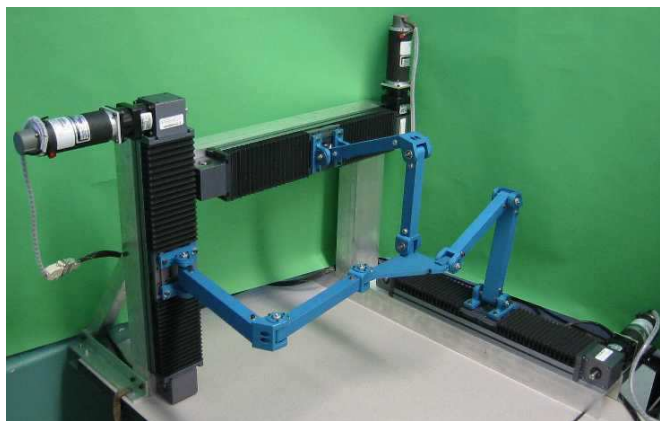


FIG. 2.30 – LTPM isotrope [Kong 02b]

Le même prototype de LTPM isotrope que celui de la Fig. 2.30 est proposé dans [Kim 02b]. Il est appelé manipulateur Cartésien (Fig. 2.31).

Enfin, les mêmes LTPM isotropes que ceux mis en évidence dans [Kong 03] sont présentés

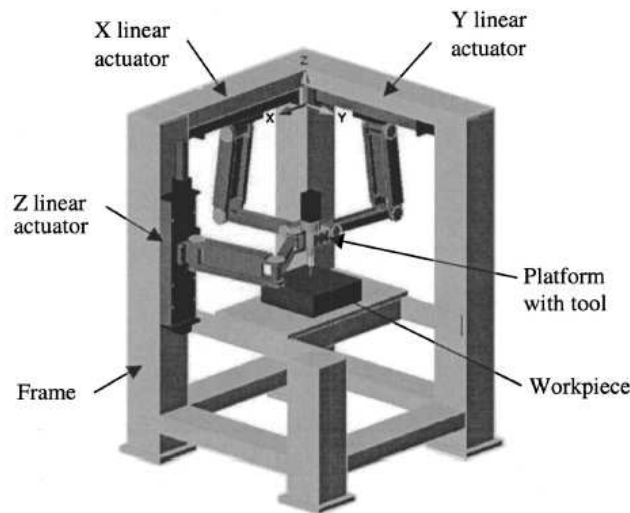


FIG. 2.31 – Manipulateur Cartésien [Kim 02b]

très pédagogiquement dans [Carricato 02]. Sur la Fig. 2.32, on présente l'une des architectures proposées. Cette architecture est également hyperstatique d'ordre 3.

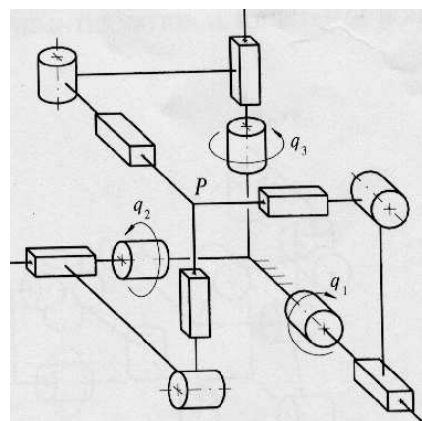


FIG. 2.32 – LTPM isotrope [Carricato 02]

Remarque : Dans [Carricato 03a], on présente des TPM dont chaque jambe est de type RRRP, c'est-à-dire qu'elle est composée de l'association en série d'une liaison pivot actionnée, de deux liaisons pivot et d'une liaison prismatique dont les axes sont parallèles à celui de l'actionneur. La topologie des jambes est en quelque sorte "inversée", et dans ce cas, on n'a plus affaire à des LTPM isotropes.

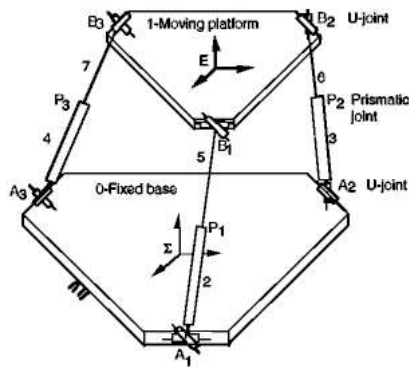
2.2.3.4 Les TPM à jambes de longueur variable

Les TPM à jambes de longueur variable sont des TPM dont les liaisons actionnées sont des liaisons prismatiques non-fixées sur le bâti, à la façon des PKM hexapodes (voir paragraphe 2.2.2.2). Nous allons présenter deux représentants de cette famille : le 3-UPU et le 3-RPC.

Un des représentants les plus connus de cette famille est le mécanisme 3-UPU assemblé

pour la translation (Fig. 2.33) qui a fait l'objet de plusieurs travaux : analyse des conditions géométrique assurant le mouvement de translation de la plate-forme mobile [Di Gregorio 99], optimisation géométrique de la plate-forme en fonction du conditionnement [Tsai 00].

Le 3-UPU est constitué d'une plate-forme mobile connectée au bâti par trois chaînes cinématiques. Chacune est constituée 1) d'une liaison cardan (U) suivie 2) d'une liaison prismatique actionnée (P) suivie 3) d'une autre liaison cardan (U). Un arrangement particulier des cardans permet de restreindre complètement l'orientation de la plate-forme mobile [Tsai 00] : pour chaque jambe, (i) l'axe de la première liaison pivot doit être parallèle à celui de la dernière liaison pivot, et (ii) les deux axes des liaisons pivot intermédiaires doivent être parallèles entre eux.



(a) Mécanisme de Tsai



(b) Prototype de Frank Park (Seoul National University)

FIG. 2.33 – Mécanisme 3-UPU

Un TPM de type 3-RPC est présenté dans [Callegari 03] (Fig. 2.34). Chaque jambe est composée de l'association en série d'une liaison de type R (*Revolute*, i.e. rotoïde/pivot), Prismatique actionnée, et de type C (*Cylindrical*, i.e. Pivot Glissant). Deux conditions géométriques doivent être vérifiées pour assurer un mouvement de translation à la plate-forme mobile : (i) pour la jambe numéro i , les axes des liaisons R et C doivent être parallèles à un même vecteur \mathbf{u}_i , et (ii) deux jambes numérotées i et j telles que $i \neq j$ doivent être arrangées telles que $\mathbf{u}_i \neq \mathbf{u}_j$.

Il existe bien sûr d'autres TPM à jambes de longueur variable. Citons par exemple [Carricato 03] qui présente de nouveaux TPM de type 3-RPRRR (la liaison prismatique est actionnée) cousins du 3-UPU, ou encore [Di Gregorio 02] qui présente des TPM de type 3-RRRRP (idem).

Plate-forme mobile

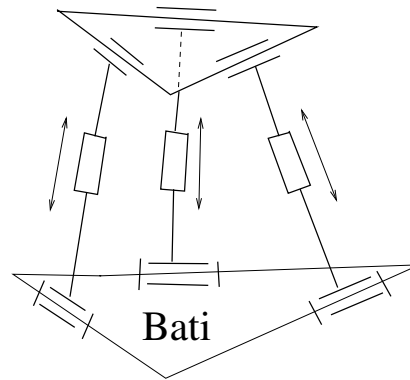


FIG. 2.34 – TPM de type 3-RPC [Callegari 03]

2.2.3.5 Les TPM de type Delta

Dans la famille des TPM à jambes de longueur fixe, on trouve les dérivés du robot Delta initialement conçu par Reymond Clavel de l'EPFL (Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne) et destiné à des opérations de type pick-and-place [Clavel 88], [Clavel 90] (Fig. 2.35). Le robot Delta est muni de trois actionneurs rotatifs reliés à des parallélogrammes qui suppriment les DDL en rotation de la plate-forme mobile.



FIG. 2.35 – Le robot Delta

Le robot Delta est intéressant car les parallélogrammes assurent une bonne rigidité torsionnelle lorsque des couples sont appliqués sur la plate-forme mobile. Par contre les pieds des jambes, c'est-à-dire les membrures qui relient l'actionneur rotatif aux parallélogrammes, sont sollicités en flexion par les couples transmis par les parallélogrammes, ce qui pose le même type de problème que pour les LTPM.

Si on remplace les actionneurs rotatifs par des actionneurs linéaires, les DDL de la plate-forme mobile ne changent pas. De plus, il devient alors possible de connecter directement le parallélogramme à la liaison actionnée. Ceci permet de supprimer le pied afin d'éliminer le problème de précision dû à sa flexion, qui conduit à son surdimensionnement, ce qui nuit aux performances dynamiques.

Le Triaglide de MIKRON et de l'ETH de Zürich possède ainsi trois liaisons prismatiques parallèles et coplanaires reliées directement au parallélogramme (Fig. 2.36). Les parallélogrammes sont liés aux liaisons prismatiques actionnées sans membrure intermédiaire donc le problème du pied n'existe pas pour cette PKM. Il est possible d'obtenir une course importante selon la direction des actionneurs prismatiques.

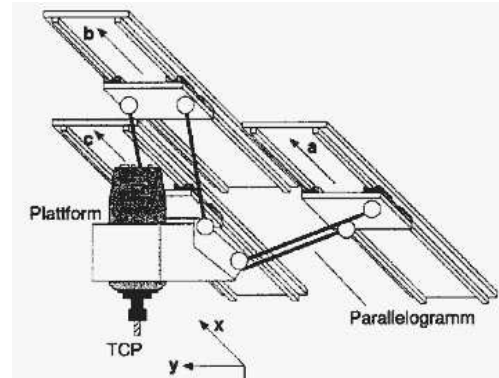


FIG. 2.36 – Le Triaglide

Les PKM Linapod de l'ISW de l'université de Stuttgart, INDEX V100 (PKM de tournage vertical), UraneSX de Renault Automation [Company 02] et Quickstep de Krause and Mauser [Holy 00], possèdent elles aussi trois liaisons prismatiques parallèles et non coplanaires, directement connectées au parallélogramme (Fig. 2.37).

L'UraneSX est spécialisée dans les opérations de type perçage-lamage-taraudage. Sa vitesse de broche est de $40,000 \text{ tr.min}^{-1}$. L'utilisation de moteurs linéaires autorise des accélérations allant de $35 \text{ à } 50 \text{ m.s}^{-2}$, et des vitesses de déplacement des axes de $100 \text{ à } 150 \text{ m.min}^{-1}$.

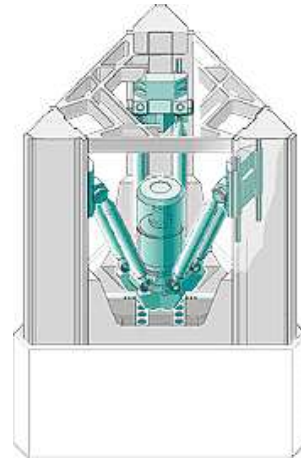
Ces architectures permettent également d'avoir une course importante le long des axes des actionneurs, ce qui est intéressant pour l'usinage de pièces longues comme on l'a vu dans le cas des tête d'usinage Sprint Z3 et Hermes, de l'Hexapode CMW, de l'Hexaglide et du Triaglide.

2.2.3.6 Conclusions

À priori toutes les topologies possibles de TPM se trouvent dans [Kong 03]. Pour chacune de celles-ci, il est important d'analyser en détails les conditions nécessaires et suffisantes au déplacement en translation de la plate-forme mobile, afin de s'assurer du bon fonctionnement du TPM. L'aptitude à l'usinage de chacune de ces architectures pourra être mesurée avec les nouveaux indices de performance que nous présenterons dans le chapitre 3.



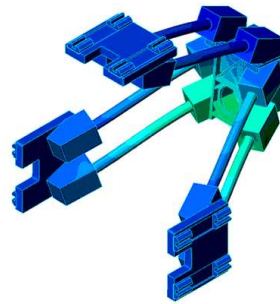
(a) Linapod



(b) INDEX V100



(c) UraneSX



(d) Quickstep

FIG. 2.37 – PKM de type Delta linéaire à liaisons prismatiques parallèles

2.2.4 Avantages et inconvénients des PKM

2.2.4.1 Avantages

L'application des mécanismes parallèles à l'UGV est prometteuse. En effet, les PKM sont réputées pour leur faible masse en mouvement, leur bonne rigidité, leurs accélérations élevées. De plus, malgré leur structure légère, le risque de problèmes vibratoires est limité par le fait qu'en UGV, les efforts de coupe sont plus faibles qu'en usinage conventionnel. Les PKM sont réputées pour être plus précises que les machines sérielles mais ce n'est pas toujours le cas [Wenger 99].

Au vu des performances de certains prototypes de PKM (vitesses de broche jusqu'à 40,000 tr.min^{-1} , vitesses de déplacement allant de 100 à 150 m.min^{-1} , accélérations jusqu'à 3G), on comprend l'intérêt des constructeurs de machines outils pour les structures parallèles. Cependant, la supériorité des PKM sur les machines sérielles n'est pas formellement prouvée. Les PKM pourraient être supérieures pour certaines tâches seulement. Ce serait néanmoins un progrès

très important. Un autre avantage des PKM est que l'utilisation des mêmes composants pour construire les jambes peut contribuer à abaisser le coût de fabrication.

2.2.4.2 Inconvénients

Cependant, les PKM ont des inconvénients. Leur espace de travail n'a pas une forme géométrique simple, ce qui est gênant pour la planification de trajectoires d'usinage classiques (rainure, perçage, contournage) qui requièrent en général un espace de travail de forme parallélépipédique. Un exemple est donné sur la Fig. 2.38 qui représente le volume de travail du Tricept de Neos Robotics. On voit que la forme de ce volume est assez complexe et peu adaptée aux formes les plus courantes des pièces à usiner. Il faudrait pouvoir prendre en compte ce problème dans la conception. C'est ce à quoi répond le chapitre 3 de cette thèse.

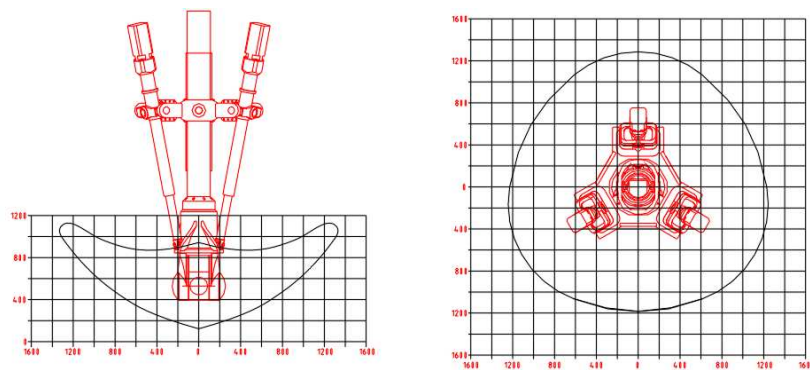


FIG. 2.38 – Forme de l'espace de travail du Tricept

De plus, le volume de travail est souvent faible par rapport à l'encombrement si l'on compare avec une machine sérielle [Rehsteiner 98]. Et les capacités d'orientation d'une PKM sont en général limitées, à cause de la présence des singularités parallèles [Krut 03].

Pour une PKM, les FAV et FAE peuvent varier de façon importante dans l'espace de travail parce que le déplacement de l'outil n'est pas du tout une fonction linéaire du déplacement des actionneurs. Cela est particulièrement vrai au voisinage des singularités, où ils atteignent des valeurs extrêmes. Cela pose un problème de précision : en effet les FAV peuvent amplifier l'erreur de mesure du codeur, mesure sur laquelle on s'appuie pour connaître la position réelle de l'outil. Cela pose aussi un problème de rigidité : les FAE peuvent être très faibles au voisinage des singularités parallèles, dans ce cas l'outil ne peut plus encaisser les efforts de coupe et les composants de la PKM peuvent être endommagés.

Enfin, la calibration des PKM peut s'avérer compliquée du fait de la complexité du modèle cinématique [Daney 00]. De plus, dans le cas des PKM à jambes de longueur variable réalisées au moyen de vis à billes, l'échauffement pose problème, car le phénomène est important et nuit à la précision de la machine. En effet, les règles de mesure ainsi que les jambes se déforment

sous l'effet de la chaleur et faussent le modèle géométrique de la machine. Les problèmes de calibration dus aux erreurs de fabrication étant déjà compliqués à résoudre dans le cas des PKM à cause de la complexité des modèles géométriques, on comprend que les problèmes de dissipation thermique soient à prendre en compte au plus tôt dans la conception d'une PKM.

2.2.4.3 Solutions possibles pour pallier les inconvénients des PKM

Dans [Pritschow 00], l'auteur propose des solutions techniques aux limitations des PKM que nous venons d'exposer (volume de travail faible, non-linéarité des performances, débattement angulaire faible à cause des singularités), dans le cas particulier de PKM planes à 2 DDL en translation, semblables à celles de la Fig. 2.1. L'auteur suggère par exemple d'utiliser une jambe passive pour mesurer précisément la position de l'outil. Ceci permet de s'affranchir des déformations des membrures et des liaisons, dues aux efforts appliqués et à la dilatation thermique car cette jambe passive n'y est pas soumise (Fig. 2.39). Ce principe est appliqué à la machine Tricept de Neos Robotics par exemple. La liaison prismatique passive est équipée de capteurs et sert de règle de mesure de la position de l'outil.

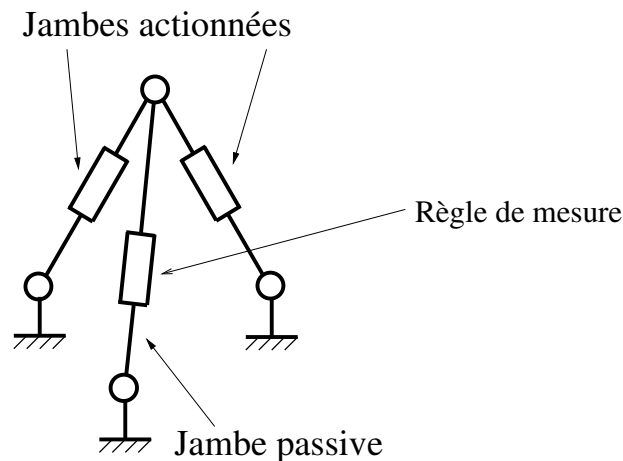


FIG. 2.39 – Utilisation d'une jambe passive pour s'affranchir des effets de la dilatation et des déformations

L'utilisation de la redondance d'actionnement est également proposée comme moyen d'éviter les singularités et d'augmenter le débattement angulaire. Sur la Fig. 2.40, la présence d'une liaison actionnée redondante permet de contrer la perte de rigidité due à la singularité parallèle. Dans cette configuration, une des jambes est en singularité parallèle car elle est alignée avec la plate-forme mobile. La présence d'actionneurs supplémentaires permet de *contrer* l'effet de la singularité, et donc de bénéficier d'un débattement angulaire plus important. Cette idée est utilisée dans [Krut 03] dans le cas de PKM spatiales.

Pour s'affranchir des pertes de rigidité au voisinage des singularités parallèles, on peut aussi changer de mode de fonctionnement afin de se placer dans une configuration meilleure du point de vue de la rigidité. Sur la Fig. 2.41, les liaisons pivot actionnées sont grisées. On sent bien que

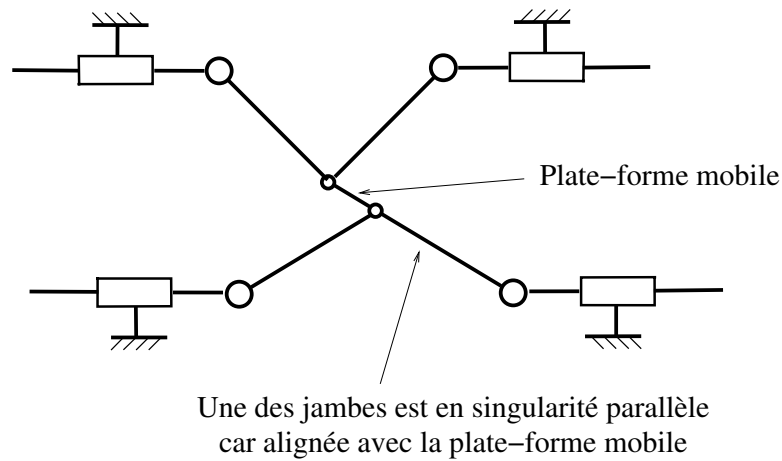


FIG. 2.40 – Utilisation de la redondance pour contrer les effets des singularités parallèles

le mécanisme de droite résistera mieux à un effort vertical que celui de gauche, qui se trouve en singularité parallèle : dans cette configuration les couples à exercer par les actionneurs doivent être infinis pour que le mécanisme encaisse un effort vertical sans que le point P se déplace.

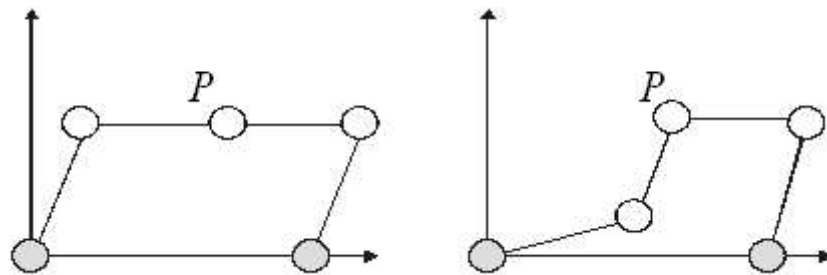


FIG. 2.41 – Changement de mode de fonctionnement pour contrer les effets des singularités parallèles

En pratique, les constructeurs de PKM n'envisagent pas cette solution, techniquement complexe et risquée (il faut franchir une singularité parallèle) et donc coûteuse. On préférera tenir compte de la non homogénéité des performances en réduisant l'espace de travail parcourable à une zone utile éloignée des singularités et garantissant des performances cinétostatiques minimales. C'est le procédé qui est utilisé dans [Wenger 00] pour concevoir et optimiser l'espace de travail de l'Orthoglide, une PKM spatiale à 3 DDL en translation sur laquelle nous nous appuierons dans les chapitres 3 et 4 afin d'illustrer nos contributions.

Pour pallier la non homogénéité des performances des PKM dans leur espace de travail, les logiciels de commande numérique devraient tenir compte des variations des FAV pour ajuster la vitesse des actionneurs afin de respecter la vitesse programmée sur la trajectoire de l'outil. Ce n'est pas le cas et les utilisateurs de PKM s'en plaignent. Par exemple, la CN 840 D de Siemens, utilisée par plusieurs PKM industrialisées, prend seulement en compte le modèle géométrique inverse mais ce n'est pas suffisant.

Cependant, prendre en compte la non homogénéité des performances ne réglerait pas le problème des variations de rigidité d'une PKM dans son espace de travail dûe aux singularités, ni un autre problème, également rencontré par les machines sérielles, lié à la discontinuité des trajectoires d'usinage : lorsque l'outil doit usiner un angle droit ou un faible rayon de courbure, les actionneurs ne peuvent accélérer suffisamment fort pour maintenir la vitesse programmée.

Un problème plus technologique posé par les PKM est la pollution magnétique qui gêne l'évacuation des copeaux si l'on utilise des moteurs linéaires, comme c'est le cas pour l'UraneSX. Dans ce cas, il faut veiller à isoler les guidages des moteurs de l'outil. L'UraneSX utilise un panneau de séparation mobile qui isole les moteurs de l'outil. Sur la Fig. 2.42, on se trouve du côté des moteurs, on voit bien les parallélogrammes et au fond la plate-forme mobile.



FIG. 2.42 – Isolation des moteurs de l'UraneSX

Lorsque les jambes sont de longueur variable et que les liaisons actionnées sont réalisées avec des vis à billes, il faut isoler la vis des copeaux. Ceci peut être réalisé en utilisant un soufflet sur chaque jambe, comme c'est le cas pour la PKM hexapode de la société Hexel (Fig. 2.43). Il faut cependant veiller à une bonne dissipation thermique afin que la chaleur générée par les frottements entre la vis et les billes ne dilate pas la vis.



FIG. 2.43 – Protection des vis à billes par un soufflet

2.2.4.4 Conclusions

L'application des mécanismes parallèles à l'usinage semble prometteuse. Il faut cependant connaître les points positifs et négatifs des PKM afin de ne pas commettre d'erreur importante lors de leur conception. Dans le Tab. 2.1, nous avons synthétisé les principales différences entre les PKM et les machines outil sérielles, ce qui revient à comparer leurs avantages et inconvénients.

Machine Outil sérielle	PKM
+ Volume de travail important / encombrement du mécanisme	– Volume de travail restreint encombrement du mécanisme
+ Volume de travail de forme régulière	– Volume de travail de forme complexe
– Performances dynamiques	++ Bonnes performances dynamiques
+ Modèle cinématique simple	– Modèle cinématique complexe
+ Performances varient linéairement	– Performances peuvent varier brutalement
+ Détection singularités facile	– Détection singularités complexe
+ Pas de singularités parallèles	– Présence de singularités parallèles dans l'espace de travail

TAB. 2.1 – Comparaison des PKM avec les machines outils sérielles

En observant ce tableau, on pourrait penser que les PKM ont tellement d'inconvénients par rapport aux machines sérielles que leur application à l'usinage ne vaut pas le coup. Cependant, l'inertie des machines outils sérielles est une barrière *physique* empêchant d'accroître la vitesse de production, à moins de construire des machines surdimensionnées et hors de prix. L'avantage principal des PKM, les performances dynamiques, a donc un poids très important, d'autant plus que certains des défauts présentés dans le Tab. 2.1 sont en train d'être résolus au niveau de la recherche/développement :

1. Dans cette thèse, nous proposons par exemple des indices de performance qui prennent en compte la forme complexe du volume de travail et la variation des performances cinétostatiques. Grâce à ces indices, les PKM les moins soumises à ces deux défauts peuvent être mises en évidence et sélectionnées pour l'industrialisation ;
2. Les commandes numériques actuelles sont de plus en plus capables d'intégrer et de gérer les modèles cinématiques complexes des PKM, cet inconvénient est donc en train de disparaître également ;
3. Comme on l'a vu dans le paragraphe 2.1.5, les méthodes de détection des singularités existent et progressent, on sait de mieux en mieux comment les identifier pour différentes familles de PKM afin de les éviter.

Ne reste donc qu'une seule véritable limite, intrinsèque aux PKM : leur volume de travail restreint, dû à l'architecture parallèle, qui fait que les jambes de la PKM se *retiennent*, en quelque sorte, les unes les autres, empêchant ainsi la plate-forme mobile d'accéder à un grand volume de travail par rapport à son encombrement.

Remarque : Ce défaut est moindre pour une certaine catégorie de manipulateurs parallèles, les LTPM isotropes (*Linear Translational Parallel Manipulator*, voir paragraphe 2.2.3.2), dont les jambes peuvent s'étendre entièrement sans être *retenues* par les autres. De plus, l'isotropie dans tout l'espace de travail est une propriété intéressante pour une PKM si la variation des FAV pose problème (voir paragraphe 2.2.4.2). Les LTPM isotropes présentent donc de nombreux atouts pour une application à l'usinage.

Malheureusement, ils ont le même défaut que les machines outils sérielles. Leurs jambes sont sollicitées en flexion, donc à priori leurs membrures nécessiteraient d'être largement dimensionnées pour résister aux déformations, ce qui nuirait aux performances dynamiques. Sur la Fig. 2.44, on a représenté une des jambes du LTPM isotrope de la Fig. 2.30 et les couples qu'il peut transmettre. On voit que les couples appliqués au niveau de la plate-forme et encaissés par les jambes vont solliciter les membrures en flexion.

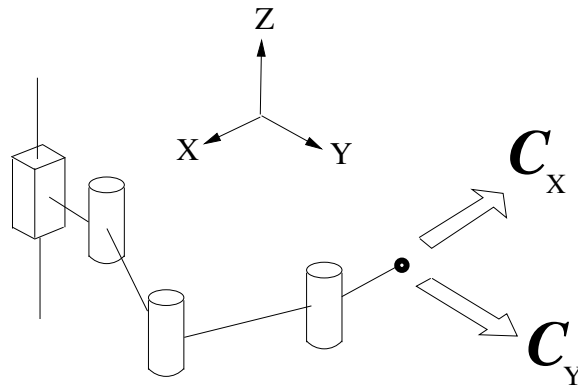


FIG. 2.44 – Sollicitation en flexion d'une jambe d'un LTPM isotrope

De plus, si l'on utilise ce LTPM isotrope pour l'usinage, les jambes vont transmettre des efforts importants (selon l'axe Z sur la Fig. 2.44) qui vont accroître la sollicitation des jambes en flexion.

Ce problème concerne vraisemblablement toutes les architectures possibles de LTPM isotropes, isostatiques ou non. Naturellement, un LTPM isotrope hyperstatique sera plus rigide et les déformations des membrures seront moindres, mais en contrepartie il sera plus coûteux à fabriquer.

Il semble donc que l'avantage du volume de travail important des LTPM isotropes par rapport à leur encombrement serait diminué par l'affaiblissement des performances dynamiques, qui pâtiraient d'un surdimensionnement des jambes nécessaire pour lutter contre les effets de la flexion et fournir la rigidité minimum requise pour l'usinage. La sollicitation en flexion des membrures d'une PKM est en effet la plus nuisible à la rigidité, comme nous le verrons dans le chapitre 4. Il est donc préférable que les membrures soient sollicitées en traction / compression, comme par exemple le sont celles constituant les parallélogrammes des PKM de type Delta linéaire (voir paragraphe 2.2.3.5).

Les LTPM isotropes ne semblent donc pas être les meilleurs candidats pour l’usinage, même si en UGV les efforts de coupe sont plus faibles. Le problème de la flexion devrait être étudié en profondeur avant d’envisager cette application.

2.3 Synthèse de mécanismes parallèles

Les travaux présentés dans cette thèse vont contribuer à aider à la conception de PKM, dont une étape importante est la synthèse du mécanisme, c’est-à-dire le choix et l’optimisation de l’architecture. Nous allons donc présenter un état de l’art portant sur la synthèse des mécanismes parallèles.

2.3.1 Introduction

2.3.1.1 Données du problème

Lors de la conception d’une PKM, il faut d’abord déterminer le type de mouvement recherché, qui dépend de l’application [Brogardh 02] : nombre et type de DDL, courses disponibles dans l’espace de travail. Puis, en fonction du mouvement et de l’amplitude recherchés (manipulateur pour le positionnement, ou l’orientation, ou les deux), on précise la structure d’actionnement (guidages prismatiques parallèles comme pour l’Uranex par exemple), la structure cinématique (pleinement parallèle, redondante, hybride, ajout de jambes passives). C’est la synthèse structurelle, phase très importante lors de la synthèse de mécanismes parallèles. La phase suivante est l’optimisation cinématique et dynamique, avec modèle de corps rigide ou flexible suivant les caractéristiques que l’on cherche à évaluer. C’est la synthèse géométrique, deuxième phase tout aussi importante.

2.3.1.2 Une approche globale est nécessaire

Dans [Merlet 02], on explique que la synthèse de mécanismes parallèles, en fonction de critères de conception définis à l’avance, pose deux problèmes : choisir la bonne topologie (synthèse structurelle), et définir la bonne géométrie pour la topologie choisie (synthèse géométrique). Les deux problèmes sont complexes : [Merlet 02] précise qu’il est difficile de comparer des topologies différentes sans spécifier la géométrie, or les performances des mécanismes parallèles dépendent fortement de leur géométrie. L’auteur suggère donc d’adopter une approche globale, c’est-à-dire de suivre une méthode de conception systématique prenant en compte de front la synthèse structurelle (ou topologique) et la synthèse géométrique (ou dimensionnelle).

2.3.1.3 Exemples d’approches globales

C’est la méthode adoptée dans [Pritschow 97]. L’auteur propose une démarche globale en 6 étapes pour la conception systématique de PKM de types hexaglide ou hexapode : choix de la topologie des jambes, choix du nombre de liaisons actionnées, choix des points de base des jambes, choix des points d’attache des jambes à la plate-forme, choix de la direction de la force appliquée par les jambes, choix de la direction de l’axe vertical. L’auteur préconise également l’utilisation d’éléments modulaires (actionneurs, liaisons cinématiques, membrures, bâti) afin que la PKM puisse être reconfigurée si l’on souhaite tester différentes architectures.

Une démarche de conception globale est aussi adoptée dans [Company 02], où l’on décrit la conception d’une PKM à translations de type Delta linéaire : l’UraneSX (voir paragraphe 2.2.3.5). Le résultat de la synthèse structurelle résulte d’une réflexion mécanique et technologique dont le but est de sélectionner la meilleure architecture parallèle existante pour des opérations d’usinage 3 axes de type perçage-lamage-taraudage. Les paramètres géométriques variables sont les suivants : l’orientation des axes des liaisons prismatiques actionnées puis, une fois celle-ci choisie, la longueur L des barres, et le paramètre $R - r$, où r est le rayon de la plate-forme et R le rayon du cylindre le long duquel sont fixés les guidages prismatiques. Les modèles permettant d’étudier l’influence de ces paramètres sur les performances cinéto-statiques, dynamiques ainsi que sur l’encombrement et la précision sont proposés. Ils peuvent servir à choisir les valeurs optimales de L et $R - r$ en fonction des performances requises par le cahier des charges.

2.3.1.4 Conclusion

Formuler une approche globale et générique est très difficile car en toute rigueur c’est un travail énorme. Ceci explique qu’il y ait pour l’instant peu de travaux sur ce sujet. Par contre il existe des travaux plus nombreux portant spécifiquement sur la synthèse structurelle et sur la synthèse géométrique. Ces deux sous-problèmes sont moins compliqués à traiter indépendamment et ils ont fait l’objet de nombreuses recherches. Nous allons présenter un état de l’art de ces travaux.

2.3.2 Synthèse structurelle

2.3.2.1 Généralités

La synthèse structurelle des mécanismes parallèles est un vaste thème de recherche qui a une grande importance, car une utilisation plus répandue de ces mécanismes dans l’industrie passe par l’invention de nouvelles architectures [Brogardh 02]. Dans [Brogardh 02] on présente

d'ailleurs de nouveaux mécanismes parallèles pour différentes applications (orientation, positionnement) utilisant différents principes techniques (mécanisme hybride, redondance) pour mettre en évidence la richesse des possibilités offertes par les mécanismes parallèles.

Cependant, la synthèse de ces nouveaux mécanismes ne résulte pas de l'utilisation d'une méthode formalisée. Ces mécanismes sont nés dans l'esprit de l'auteur à partir du mélange de trois qualités nécessaires à un concepteur de systèmes mécaniques : intuition, imagination et expérience. Procéder ainsi est néanmoins efficace car la plupart des nouveaux mécanismes parallèles découverts chaque année le sont de cette façon et ils sont nombreux.

L'auteur qui est bien conscient de ce fait suggère donc que les travaux de recherche en synthèse structurelle s'intensifient afin de découvrir des architectures nouvelles encore plus nombreuses.

2.3.2.2 Principes

Les travaux portant sur la synthèse de mécanismes parallèles commencent logiquement par définir le mouvement recherché pour la plate-forme mobile (nombre et type de DDL). Puis, en général, ils déterminent les contraintes cinématiques que chaque jambe doit appliquer sur la plate-forme pour respecter les DDL prescrits. C'est cette méthode qui est par exemple mise en oeuvre dans [Carricato 02] pour présenter très pédagogiquement les LTPM isotropes.

Pour s'assurer que les contraintes appliquées par chaque jambe sont indépendantes les unes des autres dans l'espace des configurations du mécanisme, les auteurs de ces travaux ont recours soit à une analyse géométrique exhaustive comme dans [Carricato 03], dont l'intérêt est la simplicité, soit à un formalisme mathématique qui permet d'utiliser les outils puissants de l'algèbre linéaire, dont l'utilisation est complexe et nécessite une parfaite maîtrise des concepts mathématiques qui les fondent, mais qui constitue un pas vers la mise au point d'une méthode systématique et rigoureuse de synthèse structurelle des mécanismes parallèles.

Nous allons présenter brièvement deux des formalismes utilisés, et nous renvoyons vivement à la lecture attentive des références bibliographiques citées pour plus de détails.

2.3.2.3 Utilisation de la théorie des visseurs

La théorie des visseurs, en Anglais *Screw Theory* [Ball 1900], est utilisée dans [Kong 03] pour la génération systématique de mécanismes parallèles à 3 DDL en translation ou en rotation, et dans [Fang 02] pour la génération de mécanismes parallèles à 4 et 5 DDL (3 translations + 1 ou 2 rotations). L'exposé du formalisme mathématique est assez long, donc nous allons seulement rappeler les principes de base et surtout la façon dont on utilise les visseurs pour la synthèse

structurelle.

Un visseur est défini par une droite et un pas p . On peut associer un visseur de pas infini à une liaison prismatique et un visseur de pas nul à une liaison pivot. Un visseur est appelé *twist* (ou torseur cinématique) s'il représente le mouvement instantané d'un solide, et *wrench* (ou torseur statique) s'il représente un système de forces et de couples appliqué sur un solide.

Les visseurs permettent de définir pour chaque jambe d'un mécanisme parallèle un ensemble de droites appelé *twist system* : c'est la somme des *twist* associés à chaque liaison dont est constituée la jambe. Le système réciproque du *twist system* de la jambe est appelé *wrench system* et représente le système de forces et de couples pouvant être encaissé (ou transmis) par la jambe. La somme des *wrench system* de chaque jambe forme le *wrench system* de la plate-forme mobile, c'est-à-dire le système de forces et de couples pouvant être encaissé (ou transmis) par la plate-forme mobile.

Prenons maintenant le problème à l'envers, et supposons que l'on veuille réaliser la synthèse structurelle d'un mécanisme parallèle :

1. On impose le nombre et le type des DDL de la plate-forme mobile, cela définit le *twist system* de celle-ci ;
2. On sait que le système réciproque, i.e. le *wrench system* de la plate-forme, est constitué de la somme des *wrench system* de chaque jambe ;
3. On attribue à chaque jambe une partie du *wrench system* de la plate-forme, et on en tire le système réciproque, i.e. le *twist system* de chaque jambe ;
4. On détermine les liaisons qui constituent la jambe telles que la somme des *twist* associés à chacune d'elles soit égale au *twist system* de la jambe.

Il faut ensuite s'assurer que le *twist system* de chaque jambe reste le même quelle que soit la configuration du mécanisme. En effet, une limite à l'utilisation des visseurs est qu'ils modélisent des mouvements infinitésimaux, alors que la synthèse structurelle vise à concevoir des mécanismes à mobilité finie. Pour chaque mécanisme synthétisé avec cette méthode, il faut donc prouver l'intégrabilité du mouvement infinitésimal, c'est-à-dire la permanence du mouvement infinitésimal.

Un exemple particulier de mécanisme généré grâce aux visseurs est le LTPM (voir paragraphe 2.2.3.3) isotrope présenté dans [Kong 02a] (Fig. 2.45). Ce LTPM est isotrope dans tout l'espace de travail, et sa matrice Jacobienne est la matrice Identité.

Dans [Kim 03], on utilise la théorie des visseurs pour former l'*espace des mouvements restreints* de la plate-forme mobile et construire une *matrice Jacobienne étendue* qui inclut ces mouvements restreints. Cette matrice particulière permet de déduire les différentes topologies de jambes envisageables en fonction du mouvement souhaité pour la plate-forme mobile. La

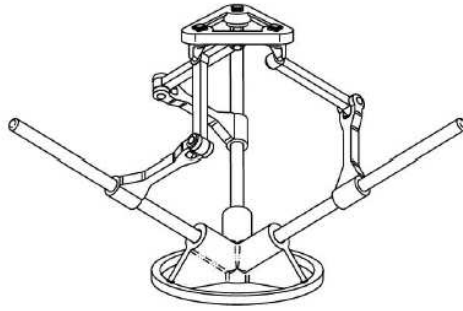


FIG. 2.45 – Mécanisme LTPM isotrope de [Kong 02a]

méthode est appliquée aux mécanismes parallèles à translations. C'est une façon similaire d'utiliser les visseurs pour la synthèse structurelle.

Remarque : Il est très intéressant d'utiliser les visseurs pour détecter les singularités parallèles. En effet, ces singularités sont des configurations en lesquelles un mouvement parasite infinitésimal de la plate-forme devient possible. En ces configurations, l'ordre du *wrench system* de la plate-forme diminue, parce que les *wrench system* des jambes deviennent colinéaires. Pour les mécanismes courants, les *wrench system* des jambes sont des droites. Il est donc simple et rapide d'intuiter les configurations singulières en imaginant le déplacement spatial de ces droites lorsque la configuration du mécanisme change.

2.3.2.4 Utilisation du groupe de Lie des déplacements

Il n'est pas toujours facile d'établir la condition d'intégrabilité du mouvement infinitésimal [Leguay-Durand 98], sauf dans les cas particuliers où le *twist system* de la plate-forme est un sous-groupe de Lie. Par conséquent, d'autres travaux sur la synthèse structurelle ont pour but de déterminer la topologie des jambes afin que le mouvement de la plate-forme mobile soit un sous-groupe du groupe de Lie des déplacements finis. Ainsi, le mouvement de la plate-forme du mécanisme généré sera forcément un mouvement fini. Si l'on veut générer un TPM, le mouvement de la plate-forme doit par exemple appartenir au sous-groupe de Lie des déplacements en translation, et si l'on veut générer un poignet sphérique¹ au sous-groupe de Lie des déplacements sphériques.

La théorie des groupes fait appel à des notions mathématiques complexes que nous n'allons pas rappeler ici. Notre but est de résumer le principe de la méthode employée pour appliquer le groupe de Lie des déplacements à la synthèse structurelle. Les travaux pionniers et complets dans ce domaine sont ceux de Jacques Hervé de l'Ecole Centrale Paris [Hervé 91] et [Hervé 99].

¹Un déplacement sphérique est un déplacement spatial en rotation autour d'un point. La plate-forme mobile d'un mécanisme parallèle sphérique possède trois degrés de liberté en rotation dont les axes de rotation sont concourants et forment une base de dimension 3

Certains des sous-groupes du groupe de Lie des déplacements finis ont une représentation matricielle : ils représentent les liaisons cinématiques élémentaires (pivot, glissière, etc...) qui caractérisent les mouvement d'un corps rigide. La représentation matricielle dans l'espace Cartésien d'une rotation ou d'une translation est courante avec le modèle géométrique de Denavit-Hartenberg par exemple.

Le principe de la méthode est similaire à celui utilisé pour les visseurs, excepté que l'on reste toujours dans le domaine cinématique, c'est-à-dire que l'on n'utilise aucune notion réciproque associée aux efforts.

Supposons par exemple que l'on veuille générer un mécanisme sphérique. Il faut choisir le nombre de sous-groupes (liaisons élémentaires) qui vont composer chaque jambe, 5 si l'on veut un mécanisme isostatique. Le sous-groupe de déplacements généré par chaque jambe est égal au produit des sous-groupes qui composent la jambe. Le sous-groupe de déplacement de la plate-forme est égal à l'intersection des sous-groupes générés par chaque jambe. Or l'intersection de sous-groupes est un sous-groupe, donc les propriétés d'algèbre de Lie (notamment le caractère fini du déplacement) du sous-groupe des déplacements de la plate-forme sont conservées.

Pour la synthèse structurelle, il faut effectuer cette démarche à l'envers, comme pour les visseurs :

1. On impose le nombre et le type des DDL de la plate-forme mobile, cela définit son sous-groupe de déplacements, on sait que ce sous-groupe est l'intersection des sous-groupes de déplacements générés par les jambes ;
2. On attribue à chaque jambe un sous-groupe de déplacements, tel que l'intersection des sous-groupes attribués aux jambes soit égale au sous-groupe de déplacements de la plate-forme ;
3. On détermine les sous-groupes (ou liaisons cinématiques) qui constituent la jambe telles que leur produit soit égal au sous-groupe de déplacements attribué à la jambe.

Le groupe de Lie des déplacements de corps rigides est appliqué à la synthèse structurelle de mécanismes parallèles à translations dans [Hervé 91] et [Hervé 99]. Dans [Karouia 03], on l'utilise pour générer tous les mécanismes parallèles sphériques (Fig. 2.46).

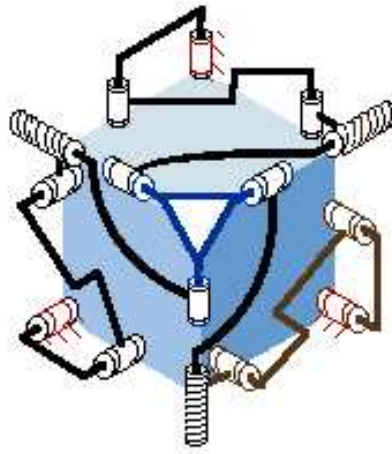


FIG. 2.46 – Mécanisme sphérique de [Karouia 03]

2.3.3 Synthèse géométrique

2.3.3.1 Introduction

La synthèse géométrique d'un mécanisme parallèle consiste en général, pour une topologie donnée des jambes, à déterminer les paramètres géométriques (dimensions des membrures, courses des liaisons actionnées, points d'attache des jambes sur le bâti) afin d'atteindre des performances prescrites par le cahier des charges.

Ces performances à atteindre peuvent être caractérisées de plusieurs façons : à partir d'un indice de performance cinétostatique comme le conditionnement qui, dans l'espace de travail, doit être maximum ou supérieur à un seuil ; à partir du volume de l'espace de travail, qui doit être maximum ou atteindre une valeur prescrite ; à partir d'un volume (cube, cylindre, etc...) qui doit être inscrit dans l'espace de travail, dont le volume doit être maximum ou atteindre une valeur prescrite.

Il arrive très souvent que les objectifs de la synthèse géométrique fassent intervenir un mélange des critères de performance décrits ci-dessus. Nous allons présenter une revue des travaux dans lesquels la synthèse (ou optimisation) géométrique est réalisée à partir de ces critères de performance.

2.3.3.2 À partir d'un indice cinétostatique

Dans [Tsai 00], on maximise le conditionnement d'un mécanisme parallèle de type 3-UPU assemblé pour la translation (Fig. 2.33). La maximisation du conditionnement moyen dans le volume de travail aboutit au choix du facteur homothétique entre la plate-forme mobile et la plate-forme fixe, qui sont des triangles équilatéraux, pour des butées articulaires prédéfinies.

C'est une optimisation à 1 seul paramètre.

Dans [Hong 00], on réalise une analyse de transmissivité en vitesse et en force de la PKM Eclipse I [Ryu 98] (Fig. 2.21). Les matrices Jacobiennes en force et en vitesse de la PKM sont calculées. Chacune d'elle est divisée en une matrice des vitesses linéaires (resp. forces) et une matrice des vitesses angulaires (resp. moments). Une mesure de manipulabilité nouvelle est introduite. Elle combine les volumes des 4 ellipsoïdes de manipulabilité relatifs aux 4 matrices obtenues, et les 4 indices conditionnements associés. Deux paramètres géométriques sont ensuite optimisés afin de maximiser cette mesure de manipulabilité. Cette méthode d'optimisation peut être appliquée à d'autres PKM à 6 DDL et un de ses intérêts est qu'elle propose une façon de résoudre le problème de la signification physique de la manipulabilité d'un manipulateur à 6 DDL calculée à partir de sa matrice Jacobienne 6×6 .

2.3.3.3 À partir d'un indice cinétostatique et du volume de de l'espace de travail

Dans [Ottaviano 02], on présente la conception optimale multi-objectifs du manipulateur parallèle CaPaMan qui possède trois degrés de liberté (Fig. 2.47). Les objectifs de l'optimisation sont la maximisation du volume de l'espace de travail en position et en orientation, ainsi que l'évitement des singularités. Les paramètres géométriques optimisés sont au nombre de 6. Une formulation générale du problème d'optimisation est présentée, ce qui est intéressant pour appliquer cette méthode à d'autres manipulateurs parallèles.



FIG. 2.47 – Mécanisme CaPaMan

Dans [Tremblay 99], on implémente un algorithme génétique pour la synthèse géométrique de manipulateurs parallèles de type Y-Star (Fig. 2.48). Les paramètres géométriques sont au nombre de 5 : ce sont les angles permettant de positionner les uns par rapport aux autres les axes des 3 liaisons prismatiques actionnées.

L'algorithme génétique a pour but de maximiser simultanément les critères de performance suivants : le volume \mathcal{W} de l'espace de travail Cartésien, le ratio d'aspect $\rho_a = v_{inner}/v_{outer}$ (où v_{inner} est le volume de la plus grande boîte inscrite dans l'espace de travail et v_{outer} est le volume de la plus petite boîte contenant l'espace de travail), le ratio de dextérité ρ_d (qui est la

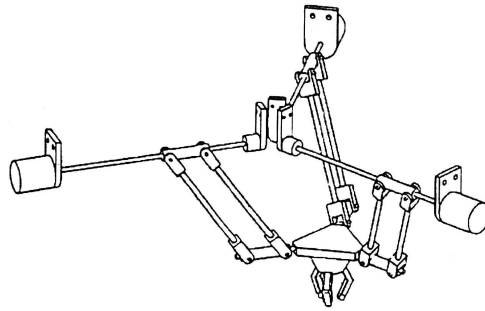


FIG. 2.48 – Mécanisme Y-Star [Hervé 92]

proportion de \mathcal{W} dans laquelle la dextérité est supérieure à 25%), et un critère moyen pondéré de ces 3 critères. Le choix des coefficients de pondération des 3 critères n'est malheureusement pas discuté, bien qu'il l'ait visiblement été par les auteurs puisque les valeurs choisies sont très précises. Les ordres de grandeur des différents indices de performance ne sont bien évidemment pas les mêmes et il faut en tenir compte au sein du critère moyen. Nous proposerons dans le chapitre 3 (paragraphe 3.7) une façon de choisir ces coefficients dans le cas de la comparaison de PKM.

L'utilisation, lors de la synthèse géométrique, d'un critère moyen pondéré prenant en compte plusieurs critères de performance différents est une idée intéressante qui permet d'optimiser un mécanisme parallèle de façon équilibrée.

C'est l'idée exprimée dans [Stock 03], où l'auteur réalise la synthèse géométrique d'une PKM de type Delta linéaire cousine du Triaglide, selon une fonction d'utilité qui est en fait une somme pondérée de deux indices, l'un basé sur le conditionnement, l'autre sur le taux d'utilisation du volume de l'espace de travail. Le nombre de variables optimisées est 4. La justification de l'utilisation d'une fonction d'utilité composée de deux indices est que l'optimisation géométrique selon un seul des deux indices aboutit à des résultats théoriques inutilisables en pratique : l'espace de travail est très petit si le conditionnement est optimisé seul, et si le taux d'utilisation du volume de l'espace de travail est optimisé seul, alors le résultat est une PKM singulière dans toutes les configurations. Le choix des coefficients de pondération n'est pas discuté en dehors des valeurs 0 ou 1.

[Stock 03] illustre néanmoins clairement l'intérêt d'utiliser des indices de performance mixtes. Nous reprendrons donc cette idée et nous l'adapterons à la comparaison de PKM dans le paragraphe 3.7.

2.3.3.4 À partir d'une mesure de la rigidité et du volume de l'espace de travail

Dans [Zhang 02], on utilise également un algorithme génétique pour maximiser la rigidité et le volume de travail d'une PKM tripode de type 3-PRS (S pour Sphérique, la liaison prismatique est actionnée) destinée à être montée sur une structure porteuse (Fig. 2.49). Le modèle flexible de ce mécanisme est basé sur la déformation des membrures en traction / compression et sur la compliance de la liaison prismatique actionnée. Les paramètres géométriques variables sont au nombre de 5. Le résultat de l'optimisation produit un mécanisme dont le volume de travail et la rigidité sont plus élevés que ceux du prototype.

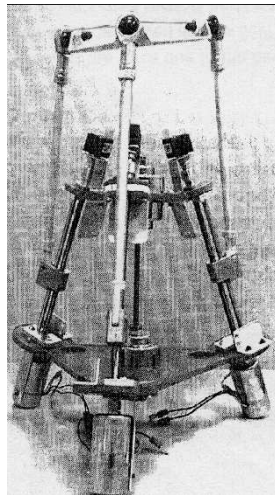


FIG. 2.49 – Mécanisme tripode

2.3.3.5 À partir d'un volume inscrit dans de l'espace de travail

Dans [Chablat 03], on optimise les paramètres géométriques d'une PKM de type Delta linéaire (appelée Orthoglide) pour qu'un cube de dimensions prescrites soit inclus dans son espace de travail, et qu'à l'intérieur de ce cube les FAV soient bornés, afin de limiter les variations des performances cinéostatiques.

Dans [Liu 04], on présente de même une méthode de conception d'un mécanisme de type UraneSX, basée sur le concept d'espace de travail inscrit maximum. Les paramètres géométriques de la PKM sont définis de telle sorte qu'un cylindre de dimensions prescrites soit inscrit dans l'espace de travail. Mais la variation des performances cinéostatiques n'est pas prise en compte.

2.3.3.6 À partir d'un volume de travail prescrit

D'autres approches de la synthèse géométrique à partir d'un volume de travail prescrit sont proposées dans [Boudreau 99], [Kosinka 03], [Merlet 97], [Merlet 02b], [Murray 96].

2.3.3.7 À partir de la raideur

Dans [Simaan 03], on propose de résoudre le problème de la synthèse géométrique d'un mécanisme parallèle à partir d'une matrice de raideur désirée. Les paramètres géométriques variables sont au nombre de 6 et sont les solutions d'un système polynomial. La solution de la synthèse de seulement 6 éléments de la matrice de raideur est donnée sous forme symbolique et conduit numériquement à 384 solutions réelles pour le choix de l'orientation des 6 liaisons actionnées.

2.3.3.8 Conclusion

Nous venons de voir que lors de la synthèse géométrique, les paramètres géométriques optimaux sont en général déterminés à l'aide d'indices de performance permettant d'optimiser ou de vérifier des critères de performance prescrits. Dans le chapitre 3, nous allons proposer de nouveaux indices de performance spécifiquement adaptés aux PKM pour leur évaluation et leur comparaison. Ces indices s'appuieront sur les concepts de cube inscrit et de limitation des performances cinéostatiques comme dans [Chablat 03].

2.4 Indices de performance pour l'évaluation et la comparaison de PKM

Les objectifs de ce paragraphe sont d'une part de rassembler les indices de performance existants pour l'évaluation et la comparaison de PKM, certains viennent d'être mentionnés, d'autre part d'en faire une analyse comparative critique en fonction des besoins de l'usinage.

2.4.1 La comparaison de PKM

Peu de travaux traitent de la comparaison de mécanismes parallèles. Pourtant, les architectures nouvelles se multiplient et il devient important de pouvoir les comparer en fonction d'autres critères que le nombre et le type de DDL. Une des principales difficultés est d'utiliser des indices de performance adéquats. Comme on l'a vu depuis le début de ce chapitre, il en existe de nombreux, mais comment les choisir ? Cela dépend de l'application envisagée.

Dans [Joshi 03] on compare par exemple un 3-UPU et un Tricept (voir paragraphe 2.2.2.5) à partir de leur volume de travail, de leur indice de dextérité globale et de leur rigidité en considérant seulement la flexibilité des actionneurs. L'intérêt de ce travail est plus l'analyse et

l'évaluation des performances que la comparaison de ces deux mécanismes, destinés au positionnement d'après l'auteur. En effet, les DDL du 3-UPU et du Tricept ne sont pas les mêmes, or en général le nombre et le type de DDL sont des paramètres qui dépendent de la tâche (voir paragraphe 2.3.1).

Dans [Xi 01], on compare cette fois des PKM de type hexaglide dont les liaisons actionnées prismatiques sont parallèles ou quasi-parallèles deux à deux, un peu comme pour l'HexaM [Toyoama 98] (Fig. 2.20). Les différents agencements sont comparés en fonction de la dextérité moyenne, du volume de l'espace de travail et des courses Cartésiennes. Aucun candidat ne maximise tous les indices simultanément, de plus la forme de l'espace de travail varie significativement suivant l'agencement choisi. Il n'est donc pas possible de mettre en évidence la meilleure configuration, seulement la moins bonne. Là encore, l'intérêt de ce travail est plus l'analyse des performances que la comparaison. Le problème est que l'on ne sait pas à quelles tâches sont destinées les PKM comparées. L'auteur fait lui-même remarquer que le choix de l'un ou l'autre des agencements dépend de l'application, sans aller plus loin afin d'exploiter concrètement les résultats obtenus.

Dans [Rao 03], on compare également différents arrangements de PKM hexaglide destinées à l'usinage. L'application est cette fois identifiée, les besoins aussi : l'auteur recherche une PKM possédant un volume de travail important et de forme simple, et des performances cinéostatiques régulières. Plusieurs agencements sont étudiés en faisant varier l'orientation et la position des liaisons actionnées prismatiques. Chacun d'eux est évalué en fonction du volume de l'espace de travail à orientation constante, du rapport entre ce volume et celui de la machine, de la dextérité globale, des courses maximum de l'outil à orientation constante selon les axes X , Y ou Z . Ces indices de performance sont choisis parce qu'ils permettent de quantifier les besoins exprimés. L'influence importante de certains paramètres est mise en évidence, et la meilleure PKM vis-à-vis des critères choisis est celle de type HexaM.

On constate donc qu'il manque souvent un lien entre les indices de performance choisis et l'application à laquelle on destine un mécanisme parallèle. Or il faut connaître l'application afin de choisir judicieusement les indices de performance en fonction du besoin. Les travaux présentés dans ce paragraphe donnent par ailleurs une bonne idée des indices de performances employés couramment pour évaluer des PKM : la forme de l'espace de travail n'est pas souvent prise en compte quantitativement, or c'est un critère de performance important pour l'usinage (voir paragraphe 2.2.4.2). La dextérité est quant à elle prise en compte, mais elle est moyennée sur tout le volume de travail ce qui n'est pas suffisant pour une application réelle : il faudrait pouvoir tenir compte de la dextérité minimale, et donc connaître la variance dans l'espace de travail, ce qui est une bonne idée mais semble assez difficile à calculer à première vue.

2.4.2 Comparaison des indices de performance existants

Nous allons rassembler ces indices de performance (ainsi que d'autres évoqués dans le paragraphe 2.3.3) dans le Tab. 2.2, en indiquant pour chacun d'eux quelles caractéristiques importantes pour la conception de PKM sont prises en compte ou non :

1. Dextérité locale de l'espace de travail, c'est-à-dire : l'indice prend-il en compte la variation des performances cinétostatiques dans l'espace de travail ?
2. Régularité géométrique du volume de travail, c'est-à-dire : l'espace de travail a-t'il une forme géométrique régulière de type cylindre, cube ou parallélépipède ?
3. Encombrement de la machine, c'est-à-dire : le volume de la PKM est-il pris en compte ?

Nous considérerons que l'encombrement d'une PKM est caractérisé par le volume \mathcal{V} occupé par l'ensemble $\{\text{volume de travail} + \text{courses articulaires} + \text{membrures}\}$. C'est la définition du volume d'une PKM qui est donnée dans [Wenger 01] pour une PKM plane : la plus petite surface rectangulaire enveloppant les courses articulaires et l'espace de travail (Fig. 2.50).

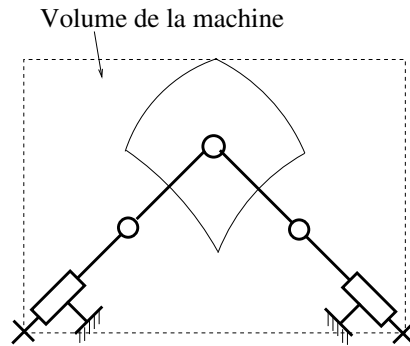


FIG. 2.50 – Volume d'une PKM plane

Dans [Rao 03] on donne une définition du volume d'une PKM spatiale de type hexaslide : c'est le produit d'une surface S par une longueur L . La surface S est celle de la plateforme sur laquelle sont fixées les guidages prismatiques, la longueur L est la distance maximale atteinte entre l'outil et cette plateforme.

Ces deux définitions du volume \mathcal{V} d'une PKM sont spécifiques aux machines étudiées, cependant la démarche adoptée est la même. Il s'agit d'englober dans un volume ou une surface réguliers (cylindre, parallélépipède, rectangle, etc...) l'ensemble $\{\text{volume de travail} + \text{courses articulaires} + \text{membrures}\}$. Nous utiliserons cette démarche pour calculer le volume \mathcal{V} des PKM dans le chapitre suivant.

Notations : \mathcal{W} représente l'espace de travail Cartésien, \mathcal{V} est le volume de la PKM, ρ_a le ratio d'aspect, ρ_d le ratio de dextérité (voir [Tremblay 99] et le paragraphe 2.3.3.3). On rappelle que le ratio d'aspect $\rho_a = v_{inner}/v_{outer}$ (où v_{inner} est le volume de la plus grande boîte inscrite dans

l'espace de travail et v_{outer} est le volume de la plus petite boîte contenant l'espace de travail), et le ratio de dextérité ρ_d est la proportion de \mathcal{W} dans laquelle la dextérité est supérieure à 25%.

Indice	Prend en compte	Ne prend pas en compte
Volume de \mathcal{W}	Volume de travail	Dextérité et régularité géométrique de \mathcal{W} , encombrement
Volume \mathcal{V}	Encombrement de la PKM	Dextérité et régularité géométrique de \mathcal{W}
Rapport \mathcal{W}/\mathcal{V}	Encombrement de la machine par rapport à son volume de travail	Dextérité et régularité géométrique de \mathcal{W}
Ratio d'aspect ρ_a	Régularité géométrique de \mathcal{W}	Dextérité de \mathcal{W} , encombrement de la machine
Moyenne des FAV	Variation des performances cinétostatiques	Régularité géométrique de \mathcal{W} , encombrement
Indice de conditionnement moyen	Dextérité globale de \mathcal{W}	Régularité géométrique de \mathcal{W} , encombrement
Ratio de dextérité ρ_d	Dextérité d'une partie de \mathcal{W} par rapport à un seuil	Régularité géométrique de \mathcal{W} , encombrement

TAB. 2.2 – Indices de performances couramment utilisés

En observant le Tab. 2.2, on constate tout d'abord que chaque indice de performance ne prend en compte qu'une seule caractéristique, par exemple le volume de travail, ou le conditionnement global. Or pour choisir les paramètres géométriques optimaux d'une PKM, il faut évaluer des caractéristiques différentes : volume de l'espace de travail, variation des performances cinétostatiques, etc... On peut réaliser des optimisations successives en utilisant des indices de performance différents, mais il faut s'assurer que les paramètres qui auront été optimisés pour satisfaire un indice ne seront pas *désoptimisés* afin de satisfaire un autre indice. On peut alors utiliser un indice de performance construit à partir de la somme pondérée de plusieurs indices différents comme dans [Stock 03] ou [Tremblay 99].

Cependant, les indices de performance existants ne permettent pas de donner des informations suffisamment concrètes à un concepteur de PKM : forme de l'espace de travail, performances cinétostatiques minimum, etc... Il y a donc un besoin réel d'indices de performance adaptés à l'évaluation de PKM d'une part, et qui prennent en compte plusieurs caractéristiques d'autre part.

Remarque : La première PKM industrialisée date de 1994 avec la VARIAX de Giddings & Lewis. On n'a pourtant pas constaté de percée remarquable des PKM dans l'industrie depuis

cette date en dépit de l'intérêt réel des PKM par rapport aux machines sérielles. Une partie de ce phénomène s'explique par le manque de convergence entre les travaux de la communauté scientifique et les besoins concrets des industriels [Bonev Web 2]. Ce problème tend aujourd'hui à se résoudre grâce à des projets de recherche Européens fédérant universités et industriels (ROBOTOOL, AHEAD), et à des séminaires et communications ciblés [Majou 01], [Merlet 02]. Un problème très important expliquant la faible percée des PKM dans l'industrie est lié au fait que les CN actuellement dédiées aux PKM ne permettent pas d'exploiter au maximum les performances des PKM.

2.4.3 L'empreinte au sol d'une PKM

L'empreinte au sol est un critère prépondérant pour une PKM destinée à l'industrialisation [Company 02]. Mais il n'y a actuellement pas d'indice global pour évaluer l'empreinte au sol d'une PKM et on l'évalue au cas par cas. L'empreinte au sol d'une PKM dépend en partie de l'orientation spatiale du mécanisme sur lequel elle est basée.

En général, l'orientation du mécanisme est choisie telle que la plate-forme mobile soit accessible par l'opérateur. L'influence de la gravité sur le dimensionnement des moteurs et l'évacuation des copeaux entre aussi en compte. L'orientation du mécanisme peut aussi et surtout être choisie de façon à minimiser son empreinte au sol.

Cependant, il peut être réducteur de déduire l'empreinte au sol d'une PKM construite (avec bâti, actionneurs et carters de protection) de l'empreinte au sol de son mécanisme. En effet, l'empreinte du mécanisme peut être différente de celle de la PKM construite. Sur la Fig. 2.24, on voit bien que le mécanisme du Tricept et la PKM 5 axes qui en est dérivée n'ont pas la même empreinte au sol. Pour une bonne évaluation de l'empreinte au sol d'une PKM, il faut donc imaginer la PKM finale qui sera construite.

2.4.4 Conclusion

Cette revue critique des indices de performance existants a permis de mettre en évidence un manque : celui d'indices de performance bien adaptés à l'évaluation et à la comparaison de PKM. Pour le combler, nous proposerons dans le chapitre 3 des indices de performance nouveaux destinés aux PKM à translations.

2.5 Un critère de performance fondamental : la précision

Nous allons maintenant nous intéresser à un critère de performance fondamental : la précision. Dans le chapitre 4, nous proposerons un outil nouveau et performant pour analyser la rigidité d'une PKM en fonction de ses paramètres géométriques. Cet outil permettra de mettre en évidence les paramètres critiques pour la rigidité, donc pour la précision. Dans ce paragraphe, nous allons donc passer en revue un certain nombre de travaux se rapportant à la précision des PKM.

2.5.1 Introduction

La précision d'une PKM est un critère de performance fondamental. De nombreuses caractéristiques influent sur celle-ci, comme par exemple : la manipulabilité du mécanisme qui dépend de la position ; la qualité de fabrication des pièces ; la dilatation thermique et la déformation sous charge des composants et des membrures ; le jeu dans les articulations ; les écarts de consigne ; la saturation des actionneurs ; etc...

La précision d'une PKM dépend donc de paramètres qui ne sont pas tous déterminés lors des synthèses structurelle et géométrique. Ces paramètres sont liés aux procédés de fabrication des pièces, à la définition complète de la géométrie et des matériaux utilisés pour les membrures -dont dépend leur déformation sous charge-, au choix des composants (liaisons cinématiques, actionneurs, codeurs), au logiciel de commande numérique choisi. Les indices du Tab. 2.2 qui permettent de déterminer la précision cinétostatique (moyenne des FAV, conditionnement moyen, ratio de dextérité ρ_d) à partir de la matrice Jacobienne sont par conséquent insuffisants pour caractériser la précision d'une PKM.

2.5.2 Étalonnage géométrique

Il est possible de mesurer assez précisément les dimensions des membrures, mais il restera toujours une imprécision liée aux moyens de mesure. De même, il est difficile de connaître la position exacte des liaisons actionnées à cause de l'erreur liée aux codeurs qui mesurent la position des liaisons actionnées. Dans [Daney 00], on discute le placement de capteurs redondants sur les liaisons passives pour améliorer la précision. Par contre, il n'est pas possible de mesurer les jeux dans les articulations, mais il existe des techniques pour les prendre en compte [Parenti-Castelli 02].

On a donc recours à des procédures d'étalonnage géométrique qui permettent d'ajuster le modèle géométrique théorique à la réalité observée. L'étalonnage statique des plates-formes hexapodes est étudié dans [Daney 00]. L'apport de la vision pour l'étalonnage géométrique des robots parallèles est présenté dans [Renaud 03].

2.5.3 Analyse de sensibilité pour la synthèse de tolérances

Il est possible de prédire quelle va être l'influence des défauts de fabrication des membrures sur l'erreur de positionnement et d'orientation de la plate-forme mobile. L'intérêt de cette prédiction est de choisir les intervalles de tolérance pour la fabrication des membrures afin de minimiser l'impact des erreurs de fabrication. Les travaux sur ce sujet sont en général basés sur le modèle géométrique de la PKM. On peut citer [Patel 97] qui présente une analyse de l'erreur de positionnement d'une PKM de type Hexapode en fonction des paramètres géométriques, et qui propose la synthèse de tolérances de fabrication à partir de l'analyse de sensibilité de la position. [Huang 02a] propose de son côté un modèle d'erreur unifié pour la synthèse de tolérance, l'assemblage et la compensation de l'erreur de positionnement, adapté aux PKM à translations de type Delta linéaire. Cette méthode est appliquée à l'Orthoglide dans [Caro 04].

2.5.4 Prise en compte de la déformation des membrures

2.5.4.1 Introduction

Il nous faut dans un premier temps définir deux mots qui seront employés à plusieurs reprises lorsque nous parlerons de rigidité :

1. La **rigidité** est la résistance à la déformation élastique en régime statique ou dynamique, de machines, de sous-ensembles ou d'éléments, sous l'effet des efforts extérieurs. La notion réciproque est la complaisance ou la flexibilité ;
2. La **raideur** est une caractéristique mécanique d'un système ou d'un élément. On parle de la raideur d'un ressort par exemple. Mathématiquement, la complaisance est aussi l'inverse de la raideur.

Les membrures se déforment sous l'action des efforts appliqués sur la plate-forme mobile. L'influence de la rigidité d'une PKM sur sa précision est par conséquent une caractéristique très importante à prendre en compte lors de la conception, et il est nécessaire de développer des outils pertinents, rapides et faciles à utiliser pour évaluer fidèlement la raideur ou la complaisance au stade de la pré-conception [Company 02].

Plusieurs modèles existent qui permettent de prendre en compte la complaisance d'une PKM afin d'analyser son comportement flexible. Nous allons les présenter.

2.5.4.2 Modélisation par Éléments Finis

Les Méthodes d'analyse par Éléments Finis (MEF) sont fiables. Elles sont incontournables si l'on souhaite mener au bout l'industrialisation d'une PKM [Bouzgarrou 02]. En contrepartie, leur implémentation 3D est complexe, et si l'on veut connaître les performances d'une PKM en différents points de l'espace de travail, il faut à chaque fois remailler la structure. Cela peut prendre du temps. Une alternative est de modéliser la structure sous forme de poutres lorsque c'est réaliste [Corradini 03]. Les calculs sont plus rapides mais il faut les relancer pour chaque configuration. Si l'on connaît la configuration la plus défavorable pour la raideur, on peut étudier seulement cette configuration.

Cependant, les contraintes des MEF ne s'accordent pas avec le besoin d'outils rapides et faciles à utiliser en pré-conception.

2.5.4.3 Modèle de rigidité cinématique avec membrures rigides

Un modèle de rigidité cinématique est présenté dans [Gosselin 90]. Il prend seulement en compte la flexibilité des liaisons actionnées et permet de calculer la matrice de raideur d'une PKM. Cette matrice dépend de la position Cartésienne et de la raideur des actionneurs. Elle relie les efforts appliqués sur la plate-forme mobile aux déplacements de celle-ci lorsque les liaisons actionnées sont bloquées. Les DDL de la plate-forme sont donc les mêmes que lorsque les liaisons actionnées sont actives. Dans le cas des PKM dont la longueur des jambes varie (bi-, tri-, hexa-podes), ce modèle est acceptable car les jambes sont uniquement sollicitées en traction / compression. De plus, les membrures et la plate-forme mobile peuvent être légitimement considérées comme infiniment rigides.

Ce modèle est utilisé dans [Khasawneh 99] pour calculer les raideurs Cartésiennes maximum et minimum d'une plate-forme de Stewart dans n'importe quelle direction, à partir du conditionnement de la matrice de raideur cinématique. L'utilisation du conditionnement pour déterminer les raideurs mini et maxi n'a pas de sens physique pour une PKM à 6 DDL car la Jacobienne n'est pas homogène. Par contre, cette procédure est adaptée aux PKM à translations. C'est le cas pour un travail similaire avec en plus les raideurs minima et maxima calculées avec une borne garantie sur l'erreur de calcul [Merlet 97].

Les hypothèses du modèle de rigidité cinématique [Gosselin 90] ne sont pas valables pour des PKM dont les jambes encaissent des couples. Dans ces cas-là, il faut pouvoir prendre en compte la flexibilité des membrures.

2.5.4.4 Modélisation de la flexibilité des membrures

Le modèle de [Gosselin 90] est utilisé et complété dans [Di Gregorio 99a] pour montrer l'influence, (i) de la flexibilité des liaisons actionnées en traction/compression, (ii) de la flexibilité des membrures en torsion, sur le comportement cinétostatique du manipulateur 3-UPU assemblé pour la translation (Fig. 2.51). Le 3-UPU est une PKM à jambes de longueur variable donc le modèle est acceptable. L'étude du conditionnement de la matrice Jacobienne a dans ce cas un sens physique. Il montre que les flexibilités dégradent les performances kinétostatiques dans une grande région de l'espace de travail, ce qui n'était pas le cas avec le modèle théorique à membrures rigides. De plus, la plate-forme mobile acquiert des DDL en rotation ce qui, malgré leur faible amplitude, est en contradiction avec le comportement attendu (translation).

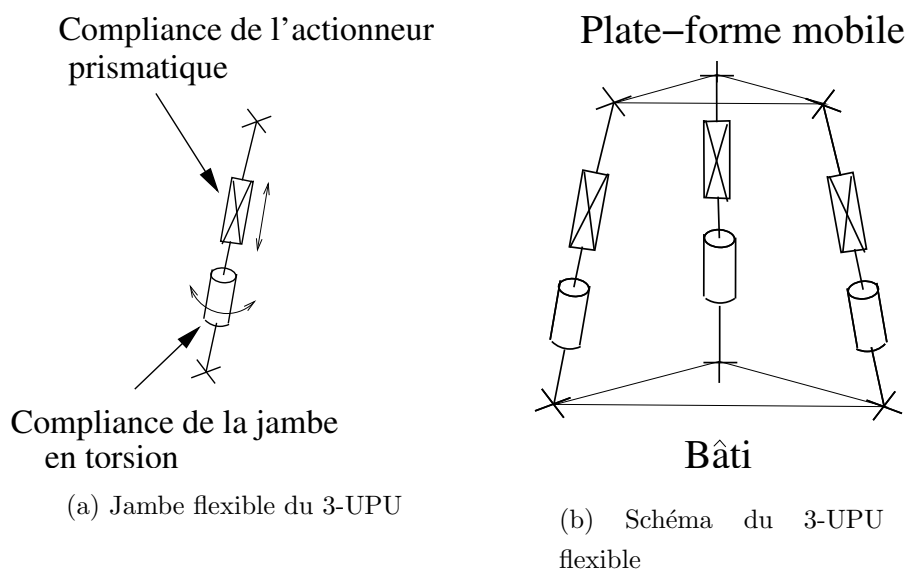


FIG. 2.51 – Modélisation flexible du 3-UPU

Dans [Ceccarelli 02], on propose une analyse de rigidité du robot CaPaMan à 3DDL. La formulation utilisée permet d'obtenir la matrice de raideur en fonction des paramètres les plus influents. La structure particulière du CaPaMan permet d'obtenir une expression analytique de la matrice de raideur, mais ceci est une particularité du manipulateur étudié, ce qui limite la généralité de la méthode proposée. Surtout, l'utilisation du déterminant de la matrice de raideur comme indice de performance n'est pas justifiée.

L'estimation de la raideur d'une PKM de type Delta linéaire à liaisons actionnées parallèles (semblable aux Linapod, UraneSX) est présentée dans [Huang 02]. La structure de la PKM est décomposée en deux sous-structures, l'une associée au mécanisme et l'autre au bâti. Le modèle de rigidité de chaque sous-structure est formulé. Ceci permet de prendre en compte les flexibilités des membrures et du bâti. Le principe de superposition permet d'assembler ces sous-modèles pour générer le modèle de rigidité de toute la structure. L'influence des différents paramètres est étudiée. L'intérêt de cette méthode est qu'elle permet de traiter une PKM hyperstatique.

La méthode d'analyse de rigidité des PKM proposée dans [Gosselin 02] est quant à elle basée sur un modèle linéaire classique qui remplace chaque membrure réelle par une membrure rigide et une liaison élastique virtuelle localisée, un peu comme dans [Di Gregorio 99a]. Avec cette méthode, il est très facile d'ajouter ou d'enlever des liaisons élastiques virtuelles, si l'on veut affiner le modèle ou le simplifier pour alléger les calculs. De plus, cette méthode présente une suite très générale d'équations sous forme symbolique ce qui permet de l'adapter facilement à n'importe quelle PKM. L'influence des paramètres géométriques sur les éléments diagonaux de la matrice de raideur est analysée.

Une approche similaire à [Gosselin 02] mais moins générique car plus simplifiée est proposée dans [Kim 00] et est appliquée à la PKM ECLIPSE I (voir paragraphe 2.2.2.4). Ce qui est intéressant est que le modèle de rigidité proposé est cette fois utilisé pour analyser le comportement élasto-dynamique de la machine. L'intérêt de l'approche proposée est que le degré des équations dynamiques obtenues est le même que le nombre de DDL de la machine, alors que l'utilisation des éléments finis conduit à des équations de degré plus élevé. Par contre ce modèle n'est valable que pour un mécanisme isostatique. Les auteurs l'utilisent pour analyser l'influence des paramètres géométriques sur les fréquences et amplitudes des modes de vibration mis en évidence. Le concepteur peut ainsi modifier ces paramètres en fonction du comportement vibratoire désiré.

Remarque sur l'hyperstatisme : on a vu que certains modèles de rigidité basés sur les équations de la statique ne peuvent s'appliquer à des PKM hyperstatiques. Pourtant, l'hyperstatisme est à priori favorable à la rigidité donc il serait intéressant de pouvoir analyser clairement son influence. Un des problèmes à résoudre est la "distribution" dans les jambes des efforts appliqués sur la plate-forme mobile. Dans [Fayet 95], une méthode générale de distribution des inconnues hyperstatiques est proposée à partir d'une matrice \mathbf{G}^* génératrice des torseurs d'action de liaison statiquement admissibles.

2.6 Conclusions

La conception de PKM est un thème de recherche vaste qui fait appel à de nombreuses notions théoriques et techniques pour franchir chaque étape, elle-même une suite de problèmes complexes.

Une approche globale intégrée de la conception de PKM, focalisée sur un seul type d'architectures mais néanmoins très intéressante par son ambition, est présentée dans [Molinari 97]. C'est un logiciel de CAO de PKM hexapode, intégrant chronologiquement dans la conception :

1. La conception structurelle et géométrique puis l'analyse automatique des performances

- cinéostatiques ;
2. Une analyse par éléments finis avec différents degrés de complexité et une analyse de sensibilité ;
 3. Un environnement de simulation dynamique prenant en compte la complaisance des membrures ;
 4. Un module FAO permettant la programmation de trajectoires d'usinage sans collisions à partir du modèle cinématique généré automatiquement.

Bien qu'uniquement orienté vers la conception d'hexapodes pour l'usinage et ne proposant qu'un nombre assez limité de choix à chaque étape, ce travail représente déjà un énorme effort, et présente l'intérêt de proposer une approche globale pragmatique. On pourrait imaginer agréger autour de ce noyau tous les travaux réalisés depuis, afin de prendre en compte le plus grand nombre d'architectures possibles.

Lors de la conception multi-critères de machine parallèle, on aboutira en général à un ensemble de solutions optimales d'après la théorie. Les erreurs de fabrication feront néanmoins que le mécanisme réel sera différent du mécanisme théorique. On cherchera donc à intégrer dans la conception des indices qui permettront d'obtenir un ensemble de solutions théoriques dont les performances seront garanties car les paramètres auront été choisis habilement pour que le robot réel possède les performances souhaitées.

Dans cette thèse, nous nous intéresserons à la conception de PKM à translations au travers de leur analyse cinéostatique. En effet, de nombreuses tâches d'usinage nécessitent seulement 3 DDL en translation donc cette famille de PKM est très importante. Nous allons proposer des outils et des indices de performance nouveaux pour aider à leur conception.

Pour qu'une PKM à translations possède des caractéristiques proches de celles des machines outils sérielles classiques, elle doit avoir des performances cinématiques qui varient peu, un espace de travail de forme régulière (cube, cylindre), un volume de travail acceptable. Actuellement aucun indice de performance ne permet de rendre compte précisément de ces caractéristiques comme on l'a vu dans le paragraphe 2.4.2. Dans le chapitre 3, nous introduirons donc une nouvelle notion, l'espace de travail dextre régulier (ou EDR), avec laquelle nous définirons de nouveaux indices de performance pour évaluer et comparer avec précision des PKM à translations en fonction du besoin lié à la tâche.

Nous nous appuierons souvent sur une PKM à translations de type Delta linéaire, dont un prototype a été développé à l'IRCCyN : l'Orthoglide.

Pour analyser le comportement flexible de l'Orthoglide dans l'EDR, nous lui appliquerons la méthode d'analyse de rigidité présentée dans [Gosselin 02], qui prend en compte la flexibilité de toutes les membrures. Dans le chapitre 4, nous implémenterons cette méthode pour

obtenir la matrice de complaisance sous forme symbolique en fonction de tous les paramètres géométriques. L'analyse de cette matrice donnera des informations très utiles sur la relation entre les paramètres géométriques et le comportement flexible de l'Orthoglide.

Chapitre 3

Évaluation des PKM à translations avec des indices cinétostatiques

Ce chapitre présente une notion nouvelle pour l'évaluation des performances des PKM à translations : l'espace dextre régulier. Cette notion permet de définir de nouveaux indices de performance. Ces indices sont appliqués à des PKM à translations, planes et spatiales.

On présente tout d'abord le processus d'optimisation topologique de l'Orthoglide, une PKM à trois degrés de liberté en translation. On définit ensuite la notion d'espace dextre régulier, basée sur la limitation d'un indice kinétostatique dans un sous-volume de l'espace de travail de forme régulière (cube, cylindre). L'espace de travail dextre régulier possède une forme simple à visualiser pour l'utilisateur par rapport aux formes souvent compliquées des espaces de travail de PKM. Le choix de la forme de l'espace dextre et son placement sont discutés. L'analyse par intervalles pour le calcul du plus grand espace de travail dextre régulier permet de garantir formellement le résultat. On propose un nouvel indice de performance, le ratio entre le volume de l'espace de travail dextre régulier et le volume de l'espace de travail. Cet indice est appliqué à l'évaluation des performances de plusieurs PKM à translations que l'on compare entre elles.

3.1 Optimisation topologique de l'Orthoglide

Dans cette partie, nous présentons le projet Orthoglide, projet pour une PKM 3 axes à translations dont les caractéristiques cherchent à être proches de celles des machines-outil sérielles. La mise en forme du processus d'élimination des singularités internes de l'architecture initiale choisie pour l'Orthoglide est une contribution de cette thèse [Majou 02]. Ce processus d'optimisation a abouti au prototype de l'Orthoglide tel qu'il a été construit à l'IRCCyN [Orthoglide Web Site].

3.1.1 Le projet

Le projet Orthoglide (Fig. 3.1) vise à construire un prototype de PKM   translations 3 axes pour l'usinage à grande vitesse. Son comportement cinématique est volontairement proche de celui d'une machine sérielle. L'Orthoglide dans sa version finale possède trois degrés de liberté en translation et trois jambes identiques. La plate-forme mobile est connectée à trois actionneurs prismatiques linéaires au moyen de trois chaînes sérielles identiques de type RP_aR (R pour Revolute, P_a pour Parallélogramme). La plate-forme se déplace avec une orientation fixée dans l'espace de travail Cartésien. L'Orthoglide a été optimisé pour un espace de travail cubique prescrit à l'intérieur duquel les performances cinétostatiques sont garanties [Chablat 03].

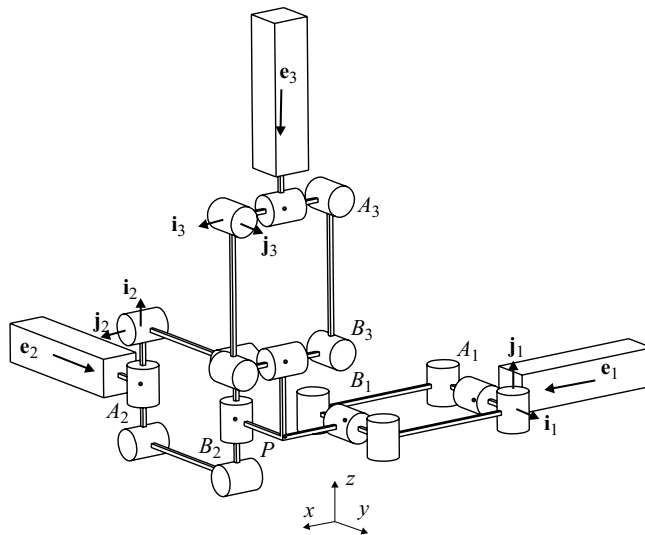


FIG. 3.1 – Architecture cinématique de l'Orthoglide [Wenger 00], [Chablat 03]

La plate-forme mobile est connectée aux liaisons prismatiques actionnées par des parallélogrammes de longueur $L = A_iB_i$, ainsi elle ne se déplace qu'en translation. Les vecteurs \mathbf{e}_i coïncident avec la direction de la liaison prismatique i . Les points A_i se trouvent entre les deux premières liaisons pivot du parallélogramme i , et B_i se trouve au milieu des deux dernières liaisons pivot.

L'axe de la première liaison prismatique est parallèle à l'axe X , celui de la deuxième est

parallèle à l'axe Y et celui de la troisième est parallèle à l'axe Z . Lorsque chaque vecteur \mathbf{e}_i est aligné avec $\mathbf{A}_i\mathbf{B}_i$, l'Orthoglide est à l'isotropie et la pointe de l'outil P se trouve à l'intersection des axes des trois liaisons prismatiques.

L'architecture cinématique décrite est dérivée de celle du robot Y-STAR [Hervé 92] (Fig. 2.48). Initialement, l'Orthoglide est basé sur cette architecture et a ensuite été optimisé dans [Wenger 00] pour obtenir une configuration isotrope avec des facteurs d'amplification des vitesses égaux à 1 à l'isotropie.

L'optimisation de l'architecture de l'Orthoglide à partir de celle du Y-Star est décrite dans [Majou 02], et nous allons la rappeler ci-après. Nous allons décrire les modifications de l'architecture initiale, de type Y-STAR, qui sont induites pour obtenir une configuration isotrope avec des facteurs de transmission des vitesses égaux à 1. Des singularités apparaissent, on montre comment elles sont éliminées.

3.1.2 Optimisation de l'architecture

Les conditions décrites dans [Wenger 00] pour obtenir une configuration isotrope sont : l'angle entre l'axe de la liaison prismatique actionnée \mathbf{T}_i (voir Fig. 3.2) et l'axe du parallélogramme \mathbf{W}_i doit être le même pour chaque jambe i , et les vecteurs \mathbf{W}_i de chaque jambe doivent être orthogonaux les uns aux autres.

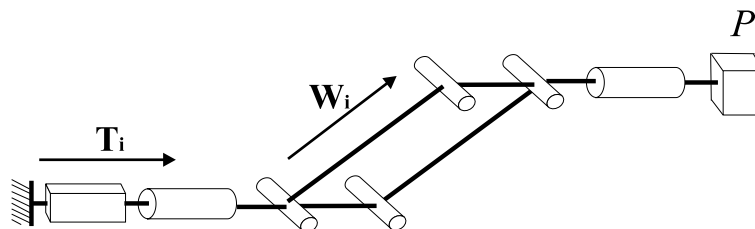


FIG. 3.2 – Structure initiale des jambes de l'Orthoglide

De plus, les conditions pour obtenir à l'isotropie des facteurs de transmission des vitesses égaux à 1 sont : pour chaque jambe, \mathbf{T}_i et \mathbf{W}_i doivent être colinéaires. Comme à l'isotropie les vecteurs \mathbf{W}_i sont orthogonaux, alors les vecteurs \mathbf{T}_i doivent aussi être orthogonaux, c'est-à-dire que les liaisons prismatiques actionnées sont orthogonales entre elles (Fig. 3.3).

3.1.3 Détection et élimination des singularités internes

L'arrangement de l'Orthoglide satisfaisant aux conditions décrites ci-dessus conduit à l'isotropie à une configuration singulière lorsque \mathbf{T}_i et \mathbf{W}_i deviennent colinéaires : (i) une rotation

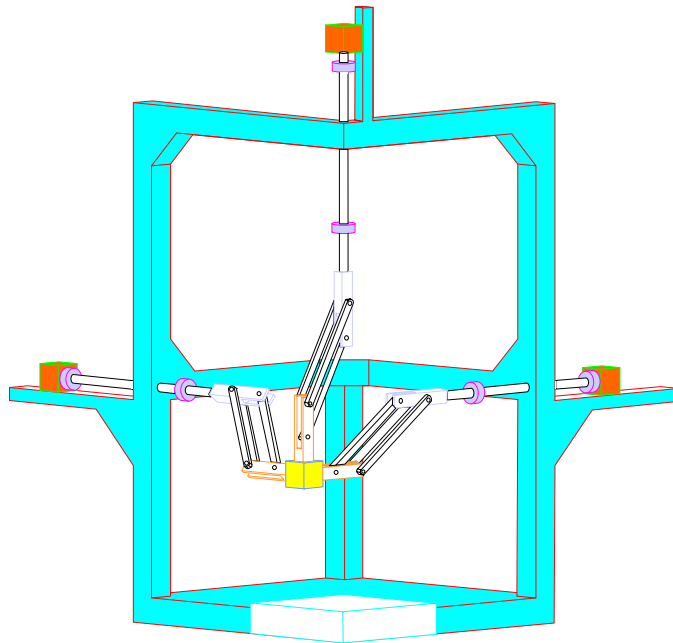


FIG. 3.3 – Architecture initiale de l'Orthoglide

passive instantanée apparaît autour d'un axe orthogonal au plan du parallélogramme (plan qui "disparaît" temporairement lorsque cette singularité se produit car \mathbf{T}_i et \mathbf{W}_i deviennent colinéaires, Fig. 3.4), (ii) le parallélogramme peut devenir un anti-parallélogramme [Vischer 00] et dans ce cas son fonctionnement cinématique change complètement, (iii) les axes des deux liaisons pivots L_{P1} et L_{P1} se confondent, ce qui implique que les variables articulaires qui leur sont associées sont indéterminées.

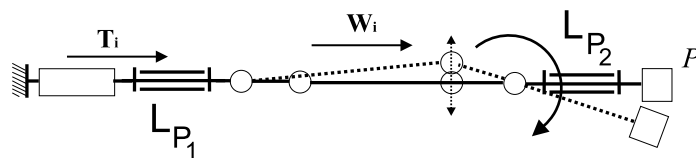


FIG. 3.4 – Singularité du parallélogramme à l'isotropie = anti-parallélogramme

Pour remédier à ce problème, on change l'architecture de la jambe en ré-arrangeant les liaisons, tout en gardant les mêmes degrés de liberté (Fig. 3.5).

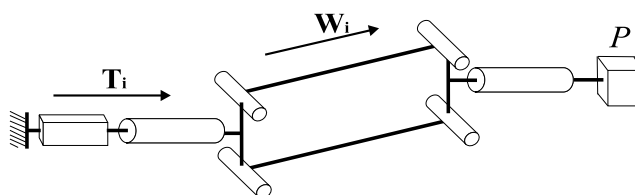


FIG. 3.5 – Jambe ré-arrangée pour prévenir l'anti-parallélogramme

Les singularités (i) et (ii) du parallélogramme à l'isotropie sont évitées mais une singularité

reste, qui n'avait pas été détectée sur le moment : la rotation passive qui est possible autour de l'axe \mathbf{T}_i lorsque \mathbf{T}_i et \mathbf{W}_i deviennent colinéaires. Cette singularité n'est pas détectée par la méthode décrite dans [Gosselin 90]. Une méthode générale d'identification et de description des singularités est proposée dans [Zlatanov 94] et d'après [Zlatanov 98], on peut caractériser cette singularité comme étant du type (RPM, IO, II). RPM signifie qu'un mouvement redondant passif (Redundant Passive Motion) est possible. Ce mouvement est la rotation du parallélogramme autour de l'axe \mathbf{T}_i (Fig. 3.6). IO (Impossible Output) et II (Impossible Input) signifient respectivement (i), qu'un jeu de vitesses cartésiennes de la plate-forme est impossible (Output= 0, Fig. 3.6) et (ii), qu'un ensemble de vitesses articulaires d'entrée est impossible (Input= 0, Fig. 3.6). En effet à l'isotropie, chaque jambe peut transmettre une force dont la direction est perpendiculaire au plan du parallélogramme de la jambe en question. La plate-forme ne peut alors pas se traduire dans cette direction (Fig. 3.6).

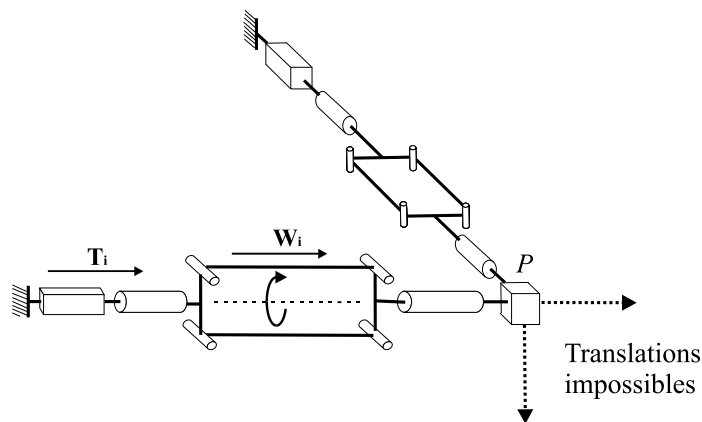


FIG. 3.6 – Singularité de la jambe de type RPM-IO-II à l'isotropie

À l'isotropie, la structure finale de la jambe de l'Orthoglide ne possède pas ces singularités (Fig. 3.7) : pas de singularité RPM du parallélogramme et pas de singularité IO-II des jambes.

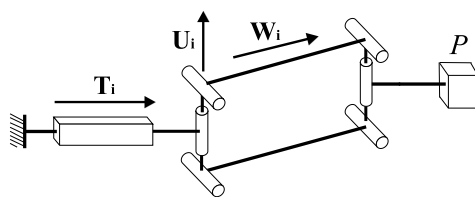


FIG. 3.7 – Version finale de la jambe de l'Orthoglide

3.1.4 Orientation des parallélogrammes

Une architecture “correcte” pour les jambes étant déterminée, comment choisir l'orientation des jambes les unes par rapport aux autres ? La théorie des visseurs [Ball 1900] (voir paragraphe 2.3.2) permet d'expliquer comment choisir ces orientations pour donner à la plate-forme mobile un mouvement de translation pure. Tout d'abord, le torseur statique (TS) extérieur qui peut

être supporté par chacune des jambes (supposée non-actionnée) est composé de deux couples : l'axe du premier est \mathbf{T}_i , l'axe du second est perpendiculaire au plan $(\mathbf{T}_i, \mathbf{U}_i)$ (Fig. 3.7). Pour qu'une PKM quelconque ne possède aucun degré de liberté en rotation, il faut que l'union des TS supportables par chaque jambe contienne tous les couples spatiaux possibles (i.e. l'espace vectoriel généré par l'union des TS supportables est de dimension 3). Par conséquent, l'union des TS supportables doit contenir les couples selon \mathbf{x} , \mathbf{y} ou \mathbf{z} , en chaque point de l'espace de travail. Cette condition est satisfaite lorsque au moins deux plans des parallélogrammes sont orthogonaux entre eux à l'isotropie. On choisit cette condition particulière car d'une part elle est simple à interpréter et d'autre part elle garantit effectivement la condition recherchée. L'Orthoglide final est représenté sur la Fig. 3.8.

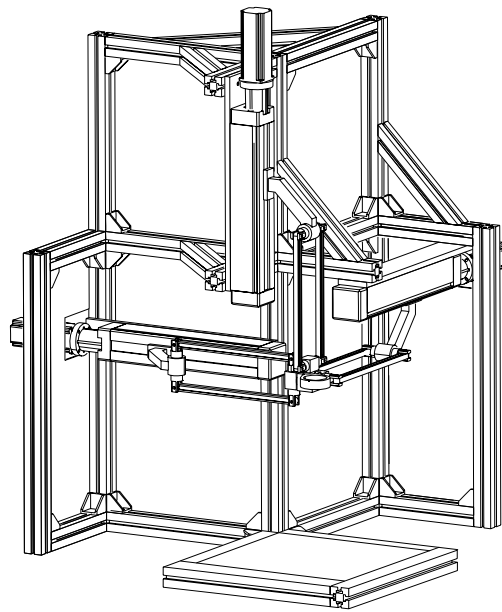


FIG. 3.8 – Version finale de l'Orthoglide

Avec cette architecture, n'importe quel couple possible est encaissé dans n'importe quelle configuration de l'Orthoglide, soit dans tout l'espace de travail. Par conséquent, il n'y a pas de “constraint singularities” [Zlatanov 01], c'est-à-dire qu'aucun degré de liberté supplémentaire ne peut apparaître et perturber le fonctionnement cinématique.

La troisième jambe est placée de telle façon qu'à l'isotropie le troisième parallélogramme soit perpendiculaire aux deux autres. Ce choix est intuitif. Il se trouve que dans le cas d'un Orthoglide isostatique (lorsqu'une liaison pivot d'axe \mathbf{T}_i est ajoutée entre le parallélogramme et la plate-forme mobile, Fig. 3.9), c'est cette configuration qui supprime tous les degrés de liberté en rotation et qui assure que l'Orthoglide isostatique possède bien trois degrés de liberté en translation. Cette remarque est importante car dans le chapitre 4, c'est cette version isostatique de l'Orthoglide qui sera exploitée.

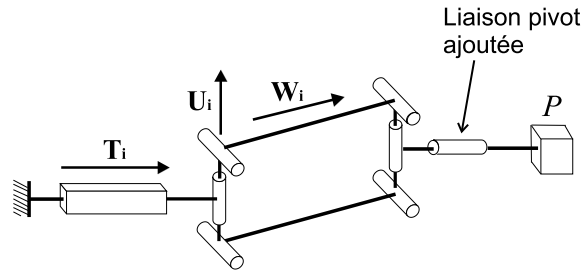


FIG. 3.9 – Version finale de la jambe pour un Orthoglide isostatique

3.1.5 Analyse statique du parallélogramme aplati

Cependant, le parallélogramme d'une jambe peut théoriquement être aplati et être alors en singularité (Fig. 3.10). C'est la même singularité que sur la Fig. 3.4. Dans ce cas une rotation passive de la barre 3 autour de l'axe (B_i, \mathbf{S}_i) apparaît, bien que les moteurs soient bloqués et l'outil immobile. Dans cette configuration, les efforts de traction/compression dans les barres 1 et 2 tendent vers l'infini, par conséquent la barre 3 ne peut être statiquement équilibrée, ce qui explique qu'un mouvement infinitésimal soit possible.

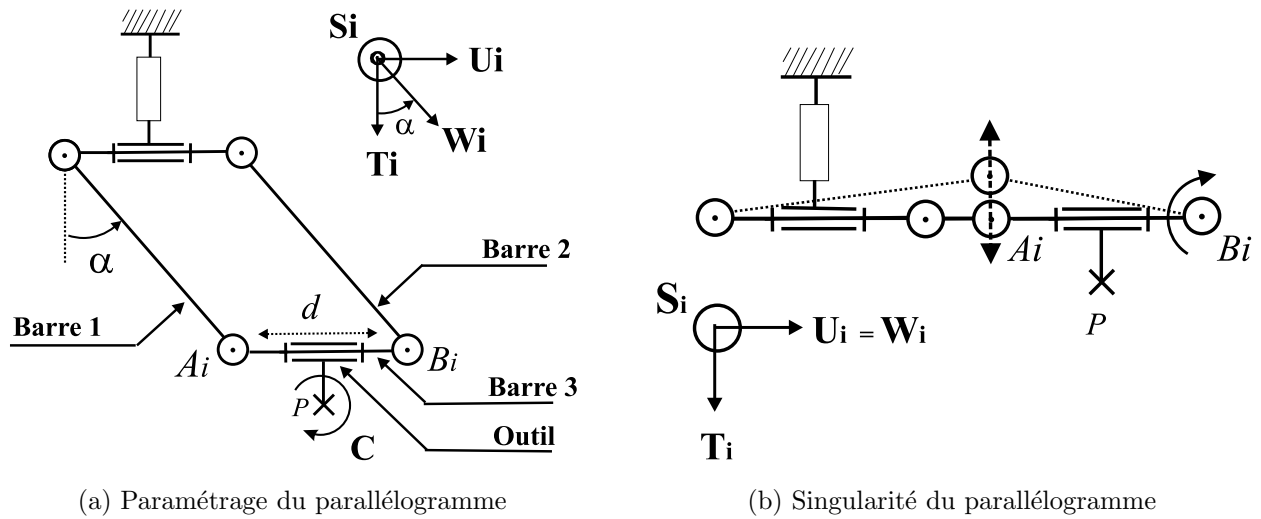


FIG. 3.10 – Aplatissement du parallélogramme

Sur la Fig. 3.10, le parallélogramme est représenté dans le plan $(\mathbf{T}_i, \mathbf{U}_i)$ parce que la rotation du parallélogramme autour de \mathbf{U}_i n'a pas d'influence sur les efforts de traction/compression dans les barres 1 et 2. On suppose dans cette analyse statique que seul un couple \mathbf{C} est exercé sur l'outil au point P , tel que : $\mathbf{C} = C.\mathbf{S}_i$

Soit $\mathbf{F}_b = F_b.\mathbf{W}_i$ la force exercée par la barre 1 sur la barre 3. La force exercée par la barre 2 sur la barre 3 est opposée. L'équilibre de la barre 3 sous l'action de ces forces et du couple \mathbf{C} s'écrit :

$$2.(F_b.\cos\alpha.d/2) = C$$

$$\Rightarrow F_b = \frac{(C/d)}{\cos\alpha}$$

Le parallélogramme est donc statiquement équilibré quand $\alpha \neq 90^\circ$. Cette condition sera toujours vérifiée pour le prototype construit. D'une part parce que le volume physique des membrures l'empêche, d'autre part parce que si le parallélogramme est aplati, une jambe au moins est en singularité "sérielle". Or ces singularités sont éliminées dans [Chablat 03] en bornant les facteurs d'amplification des vitesses dans l'espace de travail. Il n'y aura pas de risque de parallélogramme aplati.

3.2 Une notion nouvelle : l'Espace de travail Dextre Régulier

Nous venons de présenter l'Orthoglide. Nous allons nous appuyer sur cette PKM à translations pour proposer de nouveaux indices de performance adaptés aux PKM de type Delta linéaire et basés sur une notion nouvelle, l'Espace de travail Dextre régulier.

3.2.1 Notion intuitive

L'Espace de travail Dextre Régulier (ou EDR) est une portion de l'espace de travail atteignable d'une PKM, dans laquelle les problèmes posés par les machines parallèles pour l'usinage (singularités, variation des performances, voir paragraphe 2.2.4.2) n'existent plus.

La forme de l'EDR est dite *régulière*, parce qu'elle est proche de celle de l'espace de travail des machine-outils sérielles classiques (cubique, cylindrique, prismatique). Le calcul du volume du plus grand EDR va permettre d'évaluer une PKM en prenant en compte la forme de l'espace de travail. La géométrie complexe de l'espace de travail peut poser problème pour le placement de trajectoires d'usinage (voir paragraphe 2.2.4.2), aussi la prise en compte de cet aspect dans l'évaluation est intéressant.

De plus, un indice cinétostatique est borné à l'intérieur de l'EDR. Le choix des bornes dépend des besoins de l'utilisateur. La limitation d'un indice cinétostatique n'est pas souvent utilisée pour évaluer ou optimiser une PKM. Les travaux existants évaluent plutôt l'intégrale volumique d'un indice cinétostatique dans l'espace de travail (voir paragraphe 2.3.3).

La notion d'EDR pour évaluer des PKM nous semble réaliste vis-à-vis des problèmes posés par celles-ci aux usineurs. L'EDR est une portion de l'espace de travail dont les performances cinétostatiques -évaluées avec un indice choisi selon la tâche à accomplir- sont garanties, ce qui

assure l'absence de singularités. De plus, la forme régulière de l'EDR est plus simple à visualiser que celle de l'espace de travail d'une PKM, ce qui facilite le placement intuitif de trajectoires d'usinage.

Il faut préciser que la notion d'EDR est définie pour un aspect donné, noté \mathcal{A} . La notion d'aspect pour les manipulateurs parallèles est définie dans [Chablat 98] : un aspect est le plus grand domaine de l'espace Cartésien atteignable sans singularités pour un mode de fonctionnement et un mode d'assemblage donnés.

L'EDR est donc inclus dans ce que nous appelons l'Espace de travail Dextre par Aspect (ou EDA). L'EDA est, pour un aspect \mathcal{A} donné, la portion de l'espace Cartésien dans laquelle l'indice cinétostatique choisi pour l'EDR est compris entre les bornes fixées pour cet indice dans l'EDR.

Notre définition de l'EDA est différente de la notion d'espace dextre qui est utilisée dans [Merlet 98]. Dans cet article, l'espace dextre est défini comme la portion de l'espace de travail qui peut être atteinte par un point P de la plate-forme mobile pour n'importe quelle orientation de celle-ci.

Pour déterminer l'EDR, il faut préciser l'aspect \mathcal{A} dans lequel on choisit de travailler. En général, le choix de l'aspect obéit à des critères souvent intuitifs de volume de travail atteignable, d'évitement des collisions internes, et de rigidité.

Enfin, nous pouvons aussi définir l'Espace Dextre Total (ou EDT), qui est l'union de tous les EDA d'un manipulateur.

3.2.2 Passage d'un EDA à un autre

Différents modes d'assemblages peuvent donner accès à différents EDA (Fig. 3.11). Sur la Fig. 3.11, la surface $EDA_1 \cup EDA_2$ est discontinue. Si les bornes sur l'indice éliminent les singularités, il est impossible de générer une trajectoire entre EDA_1 et EDA_2 le long de laquelle les bornes sont respectées.

Si on veut passer de EDA_1 à EDA_2 , on doit franchir une singularité parallèle (Fig. 3.11). En général, on évite les singularités car elles peuvent être dangereuses pour la machine (voir paragraphe 2.1.5). Celles-ci sont le plus souvent éliminées lors de la conception structurelle et géométrique (en limitant les butées articulaires par exemple), et on fait en sorte que l'espace de travail n'en contienne aucune.

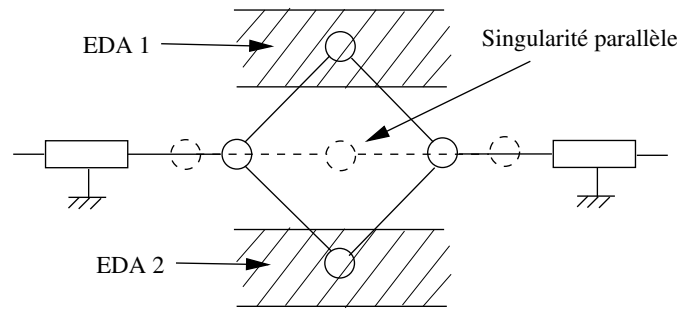


FIG. 3.11 – Espace dextre total discontinu

Dans notre exemple, si les butées articulaires sont suffisamment larges, il est théoriquement possible de franchir la singularité parallèle pour passer d'un EDA à l'autre. Il peut être intéressant qu'une PKM accède à plusieurs EDA . Par exemple, elle peut accomplir une tâche dans l' EDA_1 pendant qu'une nouvelle pièce à usiner est automatiquement installée dans l' EDA_2 . Cela permet de gagner du temps. Le concepteur devra décider s'il est rentable de franchir la singularité pour pouvoir accéder aux deux EDA . En effet, trouver un dispositif adéquat permettant de contrôler l'outil au passage de la singularité nécessitera un investissement supplémentaire en temps et en argent.

Dans [Hesselbach 02], les auteurs traversent une singularité parallèle pour passer d'un mode d'assemblage à un autre (Fig. 3.12).

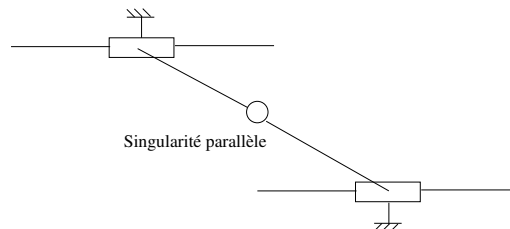


FIG. 3.12 – Singularité parallèle du mécanisme analysé dans [Hesselbach 02]

Les EDA correspondants aux deux modes d'assemblage concernés sont superposés sur la Fig. 3.13, mais pour changer de mode d'assemblage l'outil doit parcourir une trajectoire à l'extérieur de EDA_1 et EDA_2 . De plus, le long de cette trajectoire, l'outil doit franchir des singularités sérielle et parallèle. L'outil traverse donc une zone non-dextre entre EDA_1 et EDA_2 , i.e. l'indice kinéostatique est hors-bornes.

Quatre solutions sont proposées dans [Hesselbach 02] pour franchir la singularité parallèle : l'ajout d'un actionneur rotatif sur une des deux jambes, qui est activé au passage de la singularité, ce qui rend le mécanisme temporairement redondant cinématiquement ; l'utilisation d'un système poulie-courroie qui aide la machine à passer la singularité ; l'utilisation de ressorts ; l'utilisation de l'inertie des membrures pour traverser la singularité, un des moteurs étant temporairement désactivé.

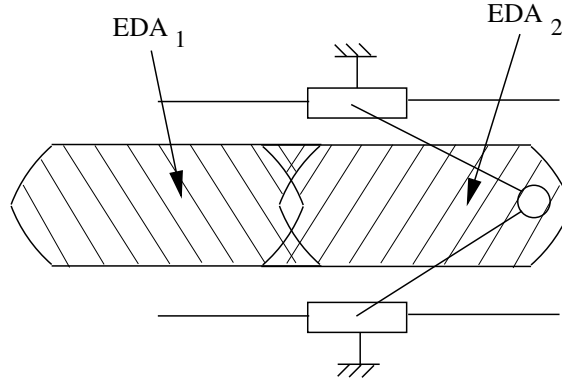


FIG. 3.13 – EDA superposés mais dont l'intersection est vide

Il est donc possible de franchir une singularité parallèle afin de bénéficier de plusieurs *EDA* pour une même PKM. Néanmoins, il n'est pas possible de relier un *EDA* à un autre tout en garantissant les performances cinéto-statiques car pour changer d'aspect il faut franchir des singularités.

Dans la suite de ce travail, nous travaillerons toujours dans un même aspect que nous noterons \mathcal{A} , et qui sera choisi pour fournir les meilleures performances cinéto-statiques, de volume de travail et d'encombrement de la machine. Les singularités sérielles et parallèles seront les limites de l'espace de travail atteignable.

3.2.3 Définition formelle de l'EDR

Pour définir l'EDR, il faut connaître :

1. Sa forme, notée \mathcal{F} , qui dépend de celle des pièces que la machine est destinée à usiner : carrée, circulaire pour les PKM planes ; cubique, cylindrique, prismatique pour les PKM spatiales, etc... ;
2. Son orientation dans l'espace Cartésien, qui va influencer sur son volume ;
3. L'indice kinéto-statique que l'on veut borner, noté ψ , qui dépend de la tâche d'usinage à accomplir ;
4. Les limites imposées sur ψ , qui dépendent des performances minimum requises.

L'EDR est donc le plus grand volume atteignable de forme \mathcal{F} , dont l'orientation est prescrite, tel que l'indice kinéto-statique ψ soit borné :

$$\mathcal{W}_{DR} = \{\mathbf{p} \in \mathcal{W} \mid \psi_{min} \leq \psi(\mathbf{p}) \leq \psi_{max} \mid \mathcal{W}_{DR} \text{ de forme } \mathcal{F}\} \quad (3.1)$$

On définit également l'EDA :

$$\mathcal{W}_{DA} = \{\mathbf{p} \in \mathcal{A} \mid \psi_{min} \leq \psi(\mathbf{p}) \leq \psi_{max}\}$$

La seule différence entre l'EDA et l'EDR est que la forme de l'EDR est prescrite.

ψ dépend de la position Cartésienne \mathbf{p} et des paramètres géométriques car il est défini à partir de la matrice Jacobienne. Les valeurs de ψ_{min} et de ψ_{max} dépendent des performances requises.

A priori, les limites imposées à ψ sont telles qu'elles éliminent les configurations singulières dans l'EDR. Dans ce cas, on peut dire que l'EDR est une région T-parcourable, c'est-à-dire sans singularités sérielles ou parallèles [Chablat 98]. Il se peut néanmoins que l'espace de travail atteignable avec les butées articulaires choisies contienne des singularités.

Attention, l'utilisation d'indices cinétostatiques pour définir l'EDR ne permet pas de détecter les singularités internes. Pour que l'EDR soit valide, il faut donc s'assurer qu'il ne s'y trouve aucune singularité de ce type.

3.2.4 Définition de nouveaux indices de performance

La notion d'EDR permet de définir de nouveaux indices de performance des PKM, par exemple le ratio entre le volume \mathcal{W}_{DR} du plus grand EDR inclus dans l'espace de travail et le volume \mathcal{W} de l'espace de travail : $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$. L'espace de travail \mathcal{W} peut contenir des singularités si les butées articulaires le permettent. L'indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$ évalue si une PKM possède dans son espace de travail un grand volume régulier dont les performances cinétostatiques sont bornées.

On peut aussi évaluer le ratio $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{V}$ où \mathcal{V} est le volume de la PKM. Ou encore le ratio $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}_{DA}$ où \mathcal{W}_{DA} est le volume de l'EDA. Nous discuterons l'utilisation de ces indices dans la partie 3.7, en fonction des performances qu'ils permettent d'évaluer.

Ces nouveaux indices peuvent s'employer pour optimiser les paramètres géométriques d'une PKM lors de la synthèse géométrique, ou pour comparer des PKM entre elles lors d'un choix d'architecture au moment de la synthèse topologique.

3.3 Calcul du volume de l'espace de travail dextre régulier

3.3.1 Préliminaires

Une fois que l'on a déterminé les caractéristiques de l'EDR (choix de l'indice, des bornes, de la forme \mathcal{F} et de l'orientation), un problème se pose : comment calculer le volume de l'EDR, comment trouver sa position dans l'espace de travail pour que son volume soit maximal ? En effet, afin que l'évaluation selon l'indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$ (ou $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{V}$, $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}_{DA}$) soit correcte, il faut calculer le volume du plus grand EDR possible.

Deux cas sont envisageables :

1. Les butées articulaires de la PKM ne sont pas prédéfinies. Dans ce cas, déterminer le plus grand EDR revient à déterminer le plus grand EDR inclus dans l'EDA. On calculera ensuite les butées articulaires pour atteindre l'EDR déterminé, et on déduira l'espace de travail \mathcal{W} de la PKM.
2. Les butées articulaires sont prédéfinies. Dans ce cas, l'espace de travail \mathcal{W} de la PKM existe déjà. Déterminer le plus grand EDR revient donc à déterminer le plus grand EDR inclus dans $\mathcal{W} \cap EDA$.

On note \mathcal{E} la portion de l'espace Cartésien dans laquelle on recherche le plus grand EDR. Selon le cas de figure envisagé, on peut avoir $\mathcal{E} \equiv EDA$ ou $\mathcal{E} \equiv \mathcal{W} \cap EDA$.

Nous proposons deux méthodes pour déterminer l'EDR. La première est une méthode de recherche manuelle, non-automatisée. Elle ne garantit pas formellement le résultat mais son fonctionnement est intuitif, le temps de calcul est de l'ordre de 15 minutes. La deuxième méthode est automatisée, basée sur l'analyse par intervalles, elle garantit formellement le résultat, par contre le temps de calcul peut varier de quelques secondes à plusieurs dizaines d'heures suivant les conditions initiales, et le déroulement de la recherche du plus grand EDR est invisible pour l'utilisateur .

3.3.2 Calcul de l'EDR en discrétisant l'espace de travail

La première méthode pour calculer le plus grand EDR est manuelle, elle consiste à déplacer intuitivement dans \mathcal{E} un volume de forme \mathcal{F} , noté $\mathcal{V}_{\mathcal{F}}$, tout en augmentant ses dimensions, pour trouver en quel point de \mathcal{E} le volume de $\mathcal{V}_{\mathcal{F}}$ peut être le plus grand. L'espace de travail Cartésien est discrétisé. Le déplacement de $\mathcal{V}_{\mathcal{F}}$ est manuel, l'augmentation des dimensions est

automatique, pour chaque jeu de dimensions on contrôle les valeurs maximum et minimum de l'indice sur la surface de $\mathcal{V}_{\mathcal{F}}$. Nous allons décrire l'algorithme de cette méthode.

Algorithme

1. Vérifier qu'il existe des points \mathbf{p} dans \mathcal{E} tels que : $\psi_{min} \leq \psi(\mathbf{p}) \leq \psi_{max}$. Pour cela, on discrétise \mathcal{E} et on calcule l'indice ψ en chaque point. Si aucun \mathbf{p} ne vérifie cette condition, alors $\mathcal{W}_{\mathcal{DR}} = \emptyset$.
2. Des points \mathbf{p} existent tels que $\psi_{min} \leq \psi(\mathbf{p}) \leq \psi_{max}$. L'un d'eux, noté \mathbf{c} , est choisi pour être le centre du volume $\mathcal{V}_{\mathcal{F}}$ initial.
3. Les dimensions de $\mathcal{V}_{\mathcal{F}}$ augmentent jusqu'à ce qu'en un point de sa surface, ψ atteigne une des limites fixées. Supposons que cette limite soit ψ_{max} et notons \mathbf{p}_{max} le point en lequel ψ_{max} est atteinte. Notons $\mathcal{V}_{\mathcal{F}_{Limite}}$ le volume ainsi déterminé. Notons ψ_{inf} la valeur minimum de ψ sur la surface de $\mathcal{V}_{\mathcal{F}_{Limite}}$ et \mathbf{p}_{inf} les coordonnées du point en lequel est atteinte ψ_{inf} .

Afin de garantir que $\mathcal{V}_{\mathcal{F}_{Limite}}$ ne contient pas de points en lesquels ψ est hors-limites, les dimensions initiales du volume $\mathcal{V}_{\mathcal{F}}$ centré sur \mathbf{c} sont très faibles : on s'assure ainsi qu'aucun point hors-limites ne se trouve compris entre \mathbf{c} et la surface du volume $\mathcal{V}_{\mathcal{F}}$ initial.

4. L'objectif de l'étape 3 est d'aboutir à un volume $\mathcal{V}_{\mathcal{F}_{Simul}}$ tel que les bornes ψ_{max} et ψ_{min} soient atteintes simultanément. Le calcul de $\mathcal{V}_{\mathcal{F}_{Limite}}$ n'est donc pas satisfaisant. On déplace donc $\mathcal{V}_{\mathcal{F}_{Limite}}$ et \mathbf{c} d'une distance d , en direction de \mathbf{p}_{inf} , parallèlement à la droite $(\mathbf{p}_{max}\mathbf{p}_{inf})$.
5. On retourne à l'étape 3 : on augmente les dimensions de $\mathcal{V}_{\mathcal{F}_{Limite}}$ jusqu'à ce qu'en un des points de sa surface ψ atteigne une des bornes. Tant que les bornes ne sont pas atteintes simultanément, on revient à l'étape 3.

Il serait intéressant de chercher à relier mathématiquement d à $\psi_{inf} - \psi_{min}$, afin de gagner du temps lorsque le premier $\mathcal{V}_{\mathcal{F}_{Limite}}$ est obtenu. Dans cet algorithme, le choix de d est donc intuitif. Si d est trop grand, une partie du $\mathcal{V}_{\mathcal{F}_{Limite}}$ déplacé peut se trouver à l'extérieur de \mathcal{E} .

6. Lorsque ψ_{max} et ψ_{min} sont atteintes simultanément sur la surface de $\mathcal{V}_{\mathcal{F}_{Limite}}$, on note $\mathcal{V}_{\mathcal{F}_{Simul}}$ le volume ainsi déterminé, et \mathbf{c}_{Simul} son centre. $\mathcal{V}_{\mathcal{F}_{Simul}}$ n'est pas forcément le plus grand EDR. Il faut le vérifier.
7. Soient \mathbf{p}_{max} (resp. \mathbf{p}_{min}) les coordonnées du point de la surface de $\mathcal{V}_{\mathcal{F}_{Simul}}$ en lequel ψ_{max} (resp. ψ_{min}) est atteinte. Pour vérifier si $\mathcal{V}_{\mathcal{F}_{Simul}}$ est le plus grand EDR, on déplace un volume test $\mathcal{V}'_{\mathcal{F}_{Simul}}$, de mêmes dimensions que $\mathcal{V}_{\mathcal{F}_{Simul}}$, perpendiculairement puis parallèlement à la droite $(\mathbf{p}_{max}\mathbf{p}_{min})$. C'est-à-dire qu'on déplace son centre \mathbf{c}'_{Simul} sur la surface d'un petit cylindre centré sur \mathbf{c}_{Simul} et orienté selon $(\mathbf{p}_{max}\mathbf{p}_{min})$. Pour chaque position de \mathbf{c}'_{Simul} , on calcule l'indice ψ sur la surface de $\mathcal{V}'_{\mathcal{F}_{Simul}}$, deux cas sont possibles :

- (a) En un point de la surface de $\mathcal{V}'_{\mathcal{F}_{Simul}}$, ψ dépasse une des bornes, dans ce cas la position \mathbf{c}'_{Simul} est rejetée.
 - (b) ψ atteint une des bornes ou n'atteint aucune des bornes en un point de la surface de $\mathcal{V}'_{\mathcal{F}_{Simul}}$. Dans ce cas on retourne à l'étape 3 et on détermine un nouveau $\mathcal{V}_{\mathcal{F}_{Simul}}$.
8. Lorsque toutes les positions \mathbf{c}'_{Simul} ont été testées, on choisit le plus grand des nouveaux $\mathcal{V}_{\mathcal{F}_{Simul}}$ et on retourne à l'étape 6. L'algorithme s'arrête lorsque toutes les positions \mathbf{c}'_{Simul} sont rejetées. Le plus grand des $\mathcal{V}_{\mathcal{F}_{Simul}}$ est le plus grand EDR.

La phase manuelle de cette méthode consiste à déplacer le centre de $\mathcal{V}_{\mathcal{F}_{Limite}}$ d'une distance d le long de la droite $(\mathbf{p}_{max}\mathbf{p}_{inf})$. Les étapes 7 et 8 peuvent être automatisées.

Si l'architecture de la PKM possède des lieux de symétrie \mathcal{L}_S (plans ou axes de symétrie), il faut les utiliser pour :

1. Rechercher le centre du plus grand EDR. En effet, le centre du plus grand EDR appartient nécessairement à \mathcal{L}_S à cause de la symétrie des performances cinéostatiques ;
2. Réduire la quantité de calculs en utilisant de même la symétrie des performances cinéostatiques : inutile de vérifier plusieurs fois l'indice cinéostatique en des points de \mathcal{E} qui sont symétriques par rapport à \mathcal{L}_S .

La méthode que nous venons de présenter est basée sur la discrétisation du volume de travail : l'espace Cartésien est représenté par un maillage de points, chaque point est le centre d'un cube ou d'un carré s'il s'agit d'une PKM plane. Pour calculer le volume de travail, on vérifie en chaque point du maillage si le MGI de la PKM possède une solution réelle dans l'aspect choisi. Si c'est le cas, on ajoute au volume de travail le volume du cube centré sur le point considéré. La précision du calcul dépend du nombre de points du maillage, dont dépend la durée du calcul.

Il est aussi possible d'utiliser des octrees pour calculer le volume de travail [Chedmail 98]. Cette technique est également basée sur la discrétisation de l'espace de travail. Mais son fonctionnement est optimisé pour diminuer le nombre de points en lesquels on vérifie que le MGI possède une solution réelle dans l'aspect choisi.

Cependant, la discrétisation du volume de travail comporte des inconvénients :

1. On ne connaît pas l'erreur commise sur le résultat final, i.e. l'écart entre le volume réel du plus grand $\mathcal{V}_{\mathcal{F}_{Simul}}$ et le volume calculé. On peut augmenter la densité de points pour diminuer l'erreur mais on ne la connaîtra toujours pas.
2. La limitation des FAV n'est pas formellement garantie dans l'EDR. Si jamais se produit une très grande variation de l'indice ψ entre deux points du maillage, au voisinage d'une singularité par exemple, alors malgré les apparences on peut passer à côté d'un point en

lequel ψ est à l'extérieur des bornes. En effet, rien ne prouve que l'indice reste à l'intérieur des bornes entre deux points valides du maillage. Mais en général, ψ est continu et il est peu probable qu'un tel cas se produise.

En contrepartie des inconvénients (méthode manuelle, erreur sur le volume inconnue), cette méthode permet de comprendre comment varie l'indice ψ , en particulier lorsque l'on effectue manuellement le déplacement de $\mathcal{V}_{\mathcal{F}_{Limite}}$ parallèlement à la droite $(\mathbf{p}_{max}\mathbf{p}_{inf})$, on se rend bien compte de la façon dont évolue ψ dans \mathcal{E} .

3.3.3 Calcul de l'EDR en utilisant l'analyse par intervalles

3.3.3.1 Préliminaires

L'utilisation de l'analyse par intervalles [Merlet 00a], [Moore 79], [Neumaier 90] permet de résoudre les deux inconvénients de la première méthode. L'analyse par intervalles permet de garantir formellement que l'indice ψ est compris entre les limites fixées, et de fixer à l'avance l'erreur entre le volume de l'EDR approximé et le volume réel.

Une méthode basée sur l'analyse par intervalles pour la détermination du plus grand EDR cubique est décrite dans [Chablat 04] pour la conception et la comparaison de PKM à translations de type Delta linéaire. L'indice kinéstatique choisi dans cette méthode est : les FAV $\psi_i(\mathbf{p})$ calculés à partir de la matrice Jacobienne. L'EDR est donc défini de la façon suivante :

$$\mathcal{W}_{DR} = \{\mathbf{p} \in \mathcal{W} \mid \psi_{min} \leq \psi_i(\mathbf{p}) \leq \psi_{max}, i = 1, 2, 3 \mid \mathcal{W}_{DR} \text{ de forme } \mathcal{F}\}$$

Les résultats obtenus seront rappelés dans le paragraphe 3.5.4. L'algorithme utilisé pour calculer le plus grand EDR utilise la librairie ALIAS [Merlet 00a] qui est une librairie d'algorithmes en C++ basés sur l'analyse par intervalles. Ces algorithmes traitent des systèmes d'équations et d'inégalités dont les expressions sont des combinaisons de fonctions mathématiques classiques (cos, sin, log, etc...) et dont les coefficients sont des réels ou parfois des intervalles. Ils permettent entre autres de trouver une approximation du minimum ou du maximum global d'une fonction, éventuellement contrainte par des équations ou des inégalités.

3.3.3.2 Description de la méthode

L'algorithme pour la détermination du plus grand EDR utilise les modules suivants :

1. **Vérification d'une boîte Cartésienne :** Pour un point \mathbf{p} dans l'espace Cartésien, on dit que \mathbf{p} est valide si $\mathbf{p} \in \mathcal{W}_{DR}$, \mathbf{p} est dit invalide dans le cas contraire. Le module de vérification d'une boîte Cartésienne, noté $\mathcal{M}(B)$, reçoit en entrée une boîte B contenue dans l'espace Cartésien et retourne 1 si tous les points de B sont valides, -1 si aucun

point de B n'est valide, 0 si B contient des points dextres, i.e. appartenant à \mathcal{W}_{DR} , et non-dextres, i.e. n'appartenant pas à \mathcal{W}_{DR} . La vérification de la validité de la boîte se fait en analysant le polynôme caractéristique \mathcal{P} de $(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)^{-1}$ avec un algorithme issu d'ALIAS.

2. **Vérification d'une boîte dans l'espace de travail :** Le module de vérification d'une boîte dans l'espace de travail, noté $\mathcal{G}(B, w)$, reçoit en entrée une boîte Cartésienne B et une longueur w . Il retourne -1 si aucun point de B ne peut être le centre d'une boîte B_w incluse dans \mathcal{W} et de côté w , 1 si tous les points de B peuvent être le centre d'une boîte B_w , 0 si B contient à la fois des points qui pourraient être le centre de B_w et d'autres non. \mathcal{W} est défini par un ensemble d'inégalités.

Algorithme pour la détermination du plus grand EDR cubique

Cet algorithme détermine un EDR cubique de côté $2w$ tel qu'aucun autre EDR cubique de côté $2(\alpha + w)$ n'est inclus dans \mathcal{W} . La première étape est la détermination du plus grand EDR cubique de centre (x_M, y_M, z_M) . Cette procédure, notée $\mathcal{C}(x_M, y_M, z_M)$, utilise le module $\mathcal{M}(B)$ pour vérifier l'indice ψ . On fait grandir un cube centré en (x_M, y_M, z_M) jusqu'à ce que les bornes sur ψ soient franchies.

L'algorithme gère une liste \mathcal{L} de boîtes Cartésiennes qui sont traitées séquentiellement. Durant le traitement, des boîtes peuvent s'ajouter à \mathcal{L} . À une étape donnée de l'algorithme, on traite la boîte i notée B_i et on a n boîtes dans \mathcal{L} . Il reste donc $n - i$ boîtes à traiter. L'algorithme s'arrête lorsque toutes les boîtes dans \mathcal{L} ont été traitées. Au début de l'algorithme, il n'y a dans \mathcal{L} qu'une seule boîte B_0 , qui contient \mathcal{W} . Une boîte B_i est définie par $B_i = [\underline{x}_i, \overline{x}_i], [\underline{y}_i, \overline{y}_i], [\underline{z}_i, \overline{z}_i]$. Le nombre maximal de boîtes dans \mathcal{L} est N .

L'algorithme comporte 6 étapes :

1. Calcul de $w = \mathcal{C}(0, 0, 0)$.
2. Si $i > n$: EXIT.
3. Si $\mathcal{G}(B_i, w + \alpha) = -1$, alors on passe de i à $i + 1$ et on retourne à l'étape 2.
4. Si $\mathcal{G}(B_i, w + \alpha) = 1$, alors on calcule $w' = \mathcal{C}(x_{B_i}, y_{B_i}, z_{B_i})$, où $(x_{B_i}, y_{B_i}, z_{B_i})$ sont les coordonnées du centre de B_i . Si $w' > w$, on met w' dans w puis on va à l'étape 6.
5. Si $\mathcal{G}(B_i, w + \alpha) = 0$, alors on va à l'étape 6.
6. On bissecte B_i selon le plus grand des 3 intervalles Cartésiens $[\underline{x}_i, \overline{x}_i]$, $[\underline{y}_i, \overline{y}_i]$ et $[\underline{z}_i, \overline{z}_i]$. Par exemple si $[\underline{x}_i, \overline{x}_i]$ est le plus grand intervalle, la bisection de B_i crée deux nouvelles boîtes $B_i^1 = [\underline{x}_i, (\underline{x}_i + \overline{x}_i)/2], [\underline{y}_i, \overline{y}_i], [\underline{z}_i, \overline{z}_i]$ et $B_i^2 = [(\underline{x}_i + \overline{x}_i)/2, \overline{x}_i], [\underline{y}_i, \overline{y}_i], [\underline{z}_i, \overline{z}_i]$. Si $n < N/2$, les deux boîtes sont stockées à la fin de \mathcal{L} et l'on passe de i à $i + 1$. Sinon B_i^1 est stockée dans \mathcal{L} à la place de B_i et B_i^2 est stockée en $i + 1$ ce qui décale d'un cran les boîtes B_{i+1}, \dots, B_n . On passe n à $n + 1$ et on retourne à l'étape 2.

L'étape 1 permet d'obtenir une valeur initiale de la longueur du côté de l'EDR cubique. L'étape 3 élimine les boîtes qui ne contiennent pas le centre du plus grand EDR à cause des limites de \mathcal{W} . Les boîtes qui satisfont l'étape 4 peuvent contenir le centre du plus grand EDR inclus dans \mathcal{W} . En effet, à l'étape 4 on calcule les dimensions du plus grand EDR centré sur le centre de B_i , et éventuellement on met à jour la valeur du côté du plus grand EDR si $w' > w$. L'étape 6 permet de diminuer la taille des boîtes B_i et d'accroître la précision du module \mathcal{G} .

L'avantage majeur de cette méthode est qu'elle garantit formellement le résultat avec une précision fixée à l'avance. Un autre avantage sur lequel nous reviendrons plus loin est que cette méthode permet de traiter facilement d'autres formes que le cube pour l'EDR. De plus, il est possible d'implanter cette méthode de façon distribuée. On peut alors espérer une convergence super-linéaire, c'est-à-dire que le gain en temps de calcul peut être supérieur au nombre de machines utilisées.

Un inconvénient est que le temps de calcul peut varier de quelques secondes à plusieurs heures en fonction des conditions initiales, or il n'est pas possible de prévoir à l'avance l'effet des conditions initiales.

Un autre inconvénient est que l'algorithme s'arrête s'il existe une configuration singulière dans le cube initial et si l'on n'a pas mis en place des sécurités numériques au niveau du calcul des racines de $\det(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)$. Cet inconvénient peut aussi être résolu en utilisant au préalable la première méthode proposée dans le paragraphe 3.3.2 qui permet de déterminer une approximation non-garantie du plus grand EDR, qui est par définition dépourvu de singularités, et qui peut donc servir de cube initial pour la méthode utilisant l'analyse par intervalles.

Pour les deux méthodes, on pourrait "inclure" l'orientation de l'EDR dans l'algorithme de détermination en réalisant un calcul selon l'une ou l'autre des deux méthodes pour chaque orientation de l'EDR, puis en sélectionnant l'EDR dont le volume est le plus grand.

3.4 Évaluation des performances d'une PKM plane à translations

Nous avons présenté une notion nouvelle, l'EDR, de nouveaux indices de performance basés sur cette notion, ainsi que deux méthodes pour calculer le plus grand EDR.

Dans cette partie nous allons utiliser la notion d'EDR pour évaluer les performances d'une PKM plane à translations. L'indice cinéto-statique choisi est : les Facteurs d'Amplification des Vitesses (FAV) entre les vitesses articulaires et les vitesses dans l'espace de travail Cartésien.

3.4.1 Définition des facteurs d'amplification de vitesse

Les FAV sont définis dans le paragraphe 2.1.4. Ils sont l'inverse des racines carrées des valeurs propres de $(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)^{-1}$. Leur expression mathématique dépend donc des paramètres géométriques de conception notés c_j , et de la position cartésienne, notée \mathbf{p} :

$$\lambda_i = \lambda_i(c_j, \mathbf{p})$$

Dans le cas d'un manipulateur pleinement parallèle qui possède deux ou trois DDL en translation et des liaisons actionnées identiques, alors les FAV ont un sens physique : ils définissent, en un point donné de l'espace de travail Cartésien, les rapports maximum et minimum entre les vitesses des liaisons actionnées et les éléments du vecteur vitesse $\dot{\mathbf{p}}$. Cette information est importante pour une PKM, c'est ce qui explique le choix des FAV comme indice cinéstatique à borner dans l'EDR.

Si la matrice jacobienne n'est pas homogène (DDL ou liaisons actionnées de nature différente), alors les FAV sont difficilement interprétables physiquement. L'homogénéisation dimensionnelle de la matrice Jacobienne est cependant possible en utilisant une longueur caractéristique comme dans [Ranjbaran 96], [Chablat 02], où le but est d'utiliser l'isotropie comme critère de conception. Cette démarche est inutile dans le cas de PKM qui possèdent deux ou trois DDL en translation et des liaisons actionnées identiques.

3.4.2 Choix des bornes sur les FAV

Il faut choisir une plage de variation $[\psi_{min}, \psi_{max}]$ qui convient à la tâche à laquelle on destine la machine. Si on choisit $\psi \neq \infty$, alors on évite les configurations singulières où les performances de la machine se détériorent (voir paragraphe 2.1.5). Le choix des bornes dépend de l'amplification de vitesse mini-maxi recherchée. L'amplification de vitesse c'est aussi l'amplification du déplacement de la liaison actionnée. Si le FAV est grand, alors un petit déplacement de la liaison actionnée provoquera un grand déplacement de l'outil. Le choix de la plage de variation $[\psi_{min}, \psi_{max}]$ est donc également lié à la précision souhaitée pour la PKM.

La moyenne des FAV dans l'EDR est une caractéristique importante de la machine. Le choix des bornes ne garantit pas la moyenne des FAV dans l'EDR. Aussi faut-il contrôler cette moyenne soi-même. Si l'on souhaite une machine rapide (donc moins précise) pour laquelle la moyenne des FAV est supérieure à 1, il ne suffit pas de fixer des bornes asymétriques, comme $[0,8; 1,6]$ par exemple. Ces bornes ne garantiront pas que les FAV seront centrés sur la moyenne des bornes soit 1,2. De même, si l'on souhaite une machine précise (donc plus lente), pour laquelle la moyenne des FAV est inférieure à 1, ou une machine rapide et précise à la fois, avec des bornes centrées sur 1, alors il faut calculer et vérifier la moyenne des FAV. On verra dans le

paragraphe 3.7 que dans certains cas la moyenne des FAV dans l'EDR est proche de la moyenne des bornes. Ceci prouve que dans certains cas l'EDR définit une zone de travail où la moyenne des FAV est proche d'une valeur choisie par le concepteur. C'est un point important qui montre l'intérêt de la notion d'EDR.

3.4.3 Choix de la forme de l'EDR

Dans cette partie nous allons illustrer les conséquences du choix de la forme de l'EDR sur un exemple de PKM plane : le Biglide. Nous discuterons la forme de l'EDR en fonction des objectifs de la machine dans le paragraphe 3.5.4, dans le cas de PKM spatiales. Comme certaines d'entre elles sont industrialisées, ce sera plus concret.

Le Biglide est constitué de deux jambes munies chacune d'une barre de longueur 1 (Fig. 3.14). Les jambes comportent des liaisons actionnées prismatiques dont les axes sont orthogonaux. P est la plate-forme mobile. Le Biglide est la version 2D de l'Orthoglide. Les bornes choisies pour les FAV sont $1/2$ et 2 , comme dans [Chablat 03].

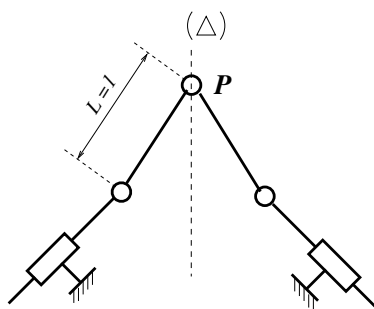


FIG. 3.14 – PKM à deux degrés de liberté en translation : le Biglide

L'aspect \mathcal{A} dans lequel on travaille est délimité par les lieux des singularités sérielles, parallèles et architecturales du Biglide (Fig. 3.15). Si les butées articulaires sont libres, \mathcal{A} constitue un espace de travail assez grand dans lequel les risques de collisions entre les jambes et le bâti sont limités.

Méthode utilisée

Pour le calcul de l'EDR, on va utiliser une méthode présentée dans [Majou 02] basée sur la discrétisation de l'espace Cartésien. Cette méthode est inspirée de l'algorithme présenté dans le paragraphe 3.3.2. C'est celle qui est utilisée dans [Chablat 03 bis]. Prenons par exemple le cas où $\mathcal{V}_{\mathcal{F}}$ est carré.

L'architecture du Biglide possède un axe de symétrie (Δ) (Fig. 3.14). Le centre de $\mathcal{V}_{\mathcal{F}Simul}$ va vraisemblablement se trouver sur (Δ) .

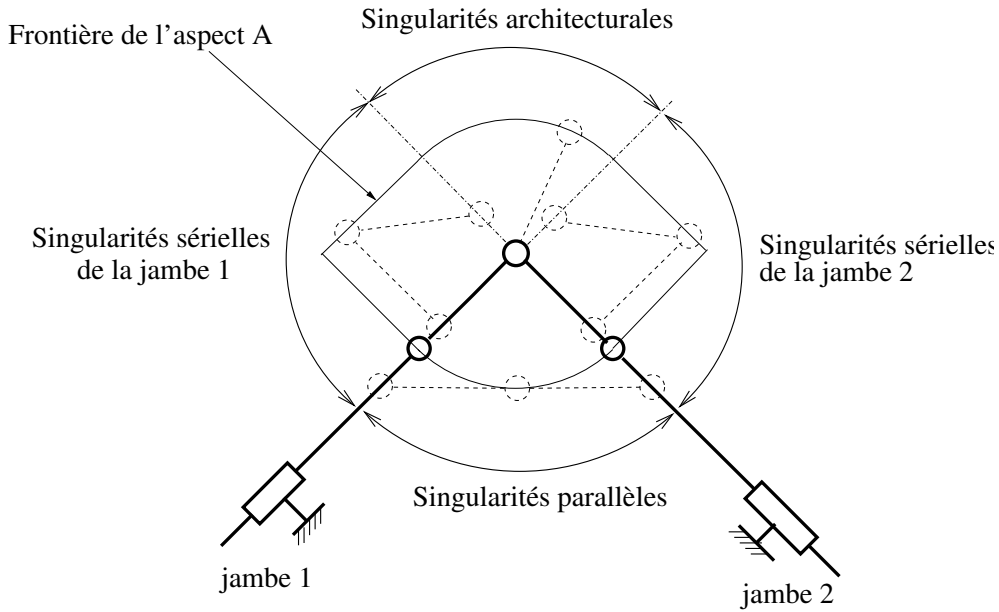


FIG. 3.15 – Représentation des lieux de singularités et de l'aspect \mathcal{A} dans lequel on travaille

Pour le vérifier, on cherche le lieu du centre de $\mathcal{V}_{\mathcal{F}}$ tel que $\mathcal{V}_{\mathcal{F}_{Limite}}$ soit le plus grand. Pour cela, on déplace $\mathcal{V}_{\mathcal{F}}$ le long de l'axe (Δ) et perpendiculairement à (Δ) le long des axes (Δ_i^\perp) (Fig. 3.16). Pour chaque position du centre \mathbf{c} de $\mathcal{V}_{\mathcal{F}}$ on calcule $\mathcal{V}_{\mathcal{F}_{Limite}}$. Le lieu de \mathbf{c} qui donne les plus grands $\mathcal{V}_{\mathcal{F}_{Limite}}$ est effectivement l'axe (Δ) .

On constate que les extrema des FAV sont localisés le long des côtés $P_i P_{i+1}, i = 1 \dots 3$, et $P_1 P_4$. On vérifiera donc les FAV seulement le long des côtés de $\mathcal{V}_{\mathcal{F}}$, tout comme dans la première méthode présentée dans le paragraphe 3.3.2. Les FAV valent 1 en S , puis varient jusqu'à atteindre ψ_{min} ou ψ_{max} sur les côtés de $\mathcal{V}_{\mathcal{F}}$. Les expressions analytiques des FAV $\lambda_i(c_j, \mathbf{p})$ sont obtenues avec le logiciel MAPLE.   partir de ces expressions, le calcul des FAV le long des 4 côtés de $\mathcal{V}_{\mathcal{F}}$ prend 5 sec. avec un PC de type Pentium II.

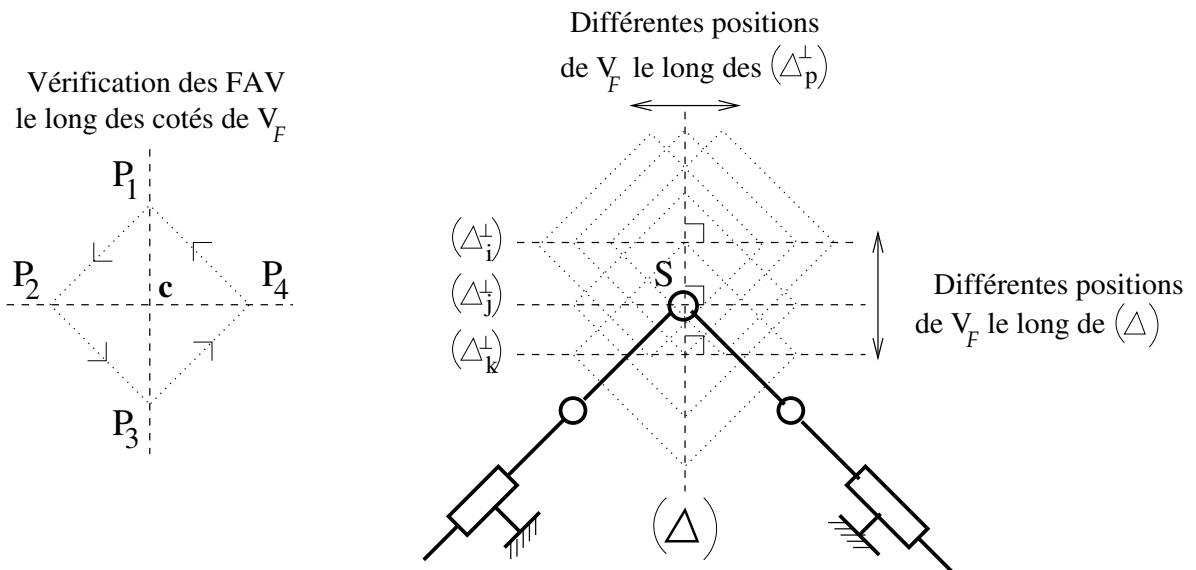


FIG. 3.16 – Recherche des plus grands $\mathcal{V}_{\mathcal{F}_{Limite}}$

Pour calculer $\mathcal{V}_{\mathcal{F}_{Limite}}$, on choisit un point sur l'axe Δ , on fait grandir $\mathcal{V}_{\mathcal{F}}$ jusqu'à atteindre $\mathcal{V}_{\mathcal{F}_{Limite}}$, en calculant les FAV le long des côtés de $\mathcal{V}_{\mathcal{F}}$ (Fig. 3.17).

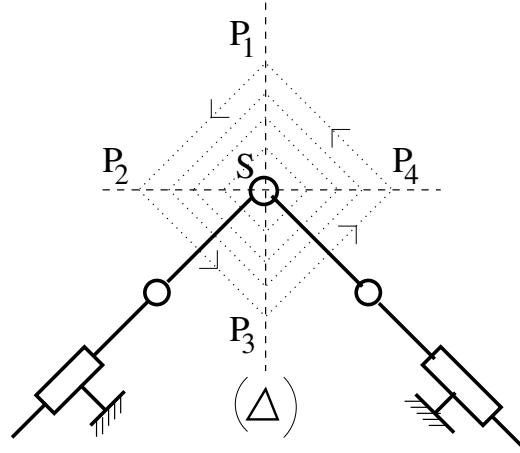


FIG. 3.17 – Accroissement de $\mathcal{V}_{\mathcal{F}}$ en calculant les FAV le long des côtés

On remarque que les bornes sont toujours atteintes aux points P_1 ou P_3 (Figs. 3.17 et 3.18). Le centre du plus grand $\mathcal{V}_{\mathcal{F}_{Limite}}$ est le point S . De plus, le $\mathcal{V}_{\mathcal{F}_{Limite}}$ de centre S atteint ψ_{max} simultanément en P_1 et en P_3 . Le $\mathcal{V}_{\mathcal{F}_{Limite}}$ calculé en S est donc le $\mathcal{V}_{\mathcal{F}_{Simul}}$. On constate sur la Fig. 3.18, qui représente les FAV dans $\mathcal{V}_{\mathcal{F}_{Simul}}$, que λ_1 varie peu contrairement à λ_2 , et que c'est λ_2 qui atteint ψ_{max} en P_1 et en P_3 .

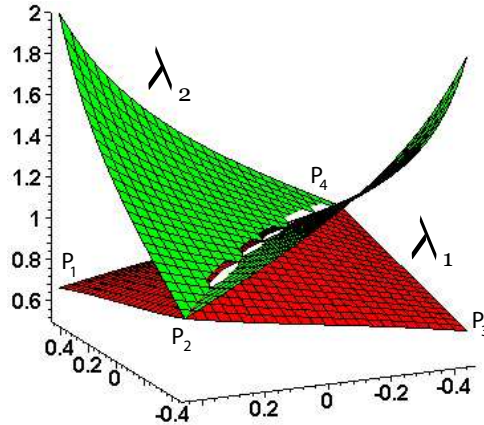


FIG. 3.18 – Représentation 3D des FAV

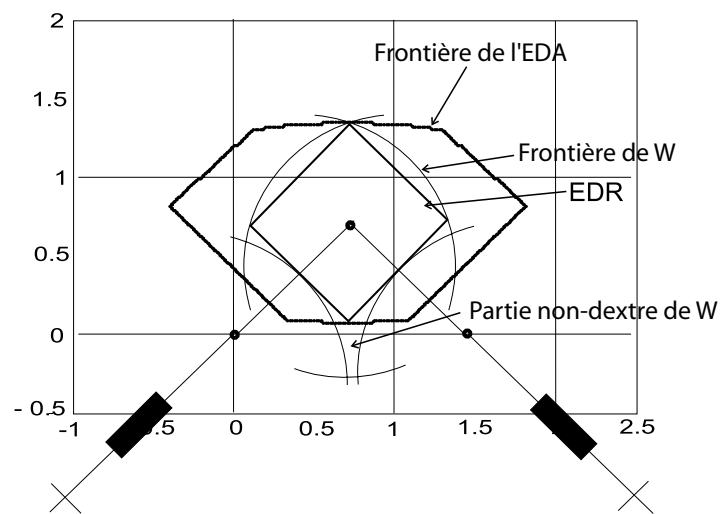
Cas 1 : Les butées articulaires ne sont pas prédéfinies

Comme on l'a vu dans le paragraphe 3.3.1, deux cas sont possibles pour calculer le plus grand EDR, si les butées articulaires sont prédéfinies ou non. Dans ce premier cas, les butées articulaires ne sont pas prédéfinies, mais on va les déterminer de façon à atteindre le plus grand EDR.

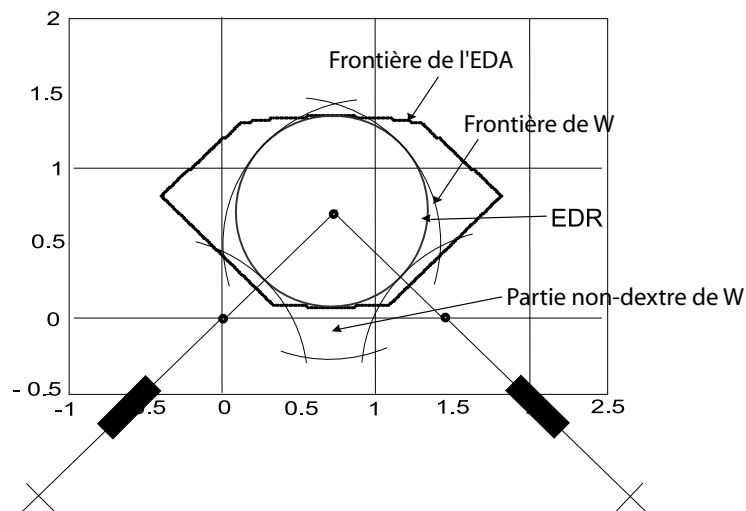
Deux formes différentes sont proposées pour l'EDR : le disque et le carré.

La procédure de détermination du plus grand EDR circulaire est la même que celle du carré : on calcule les FAV le long du pourtour de $\mathcal{V}_{\mathcal{F}}$ que l'on fait grandir jusqu'à atteindre $\mathcal{V}_{\mathcal{F}_{Limite}}$. De même on constate que le lieu des centres \mathbf{c} qui donne les plus grands $\mathcal{V}_{\mathcal{F}_{Limite}}$ est l'axe (Δ) . De même le centre du plus grand $\mathcal{V}_{\mathcal{F}_{Limite}}$ est le point S , et dans ce cas $\mathcal{V}_{\mathcal{F}_{Limite}}$ atteint ψ_{max} simultanément en P_1 et en P_3 . De même le $\mathcal{V}_{\mathcal{F}_{Limite}}$ de centre S est donc le $\mathcal{V}_{\mathcal{F}_{Simul}}$.

Sur la Fig. 3.19, on a représenté les plus grands EDR carré et circulaire inscrits dans l'EDA, ainsi que l'espace de travail atteignable avec les butées articulaires calculées dans les deux cas.



(a) EDR carré



(b) EDR circulaire

FIG. 3.19 – L'EDA du Biglide et son espace de travail pour un EDR carré ou circulaire

On rappelle la définition de l'EDA :

$$\mathcal{W}_{DA} = \{\mathbf{p} \in \mathcal{A} \mid \psi_{min} \leq \psi(\mathbf{p}) \leq \psi_{max}\}$$

Pour déterminer l'EDA, il faut donc déterminer tous les points dextres de \mathcal{A} , tels que si $\mathbf{p} \in \mathcal{W}_{DA}$, alors :

$$\psi_{min} \leq \psi_i(\mathbf{p}) \leq \psi_{max}, i = 1, 2$$

L'EDA est indépendant des limites articulaires. Pour le déterminer, nous avons appliqué la méthode suivante :

1. Discrétisation de l'espace Cartésien \mathcal{C} , définition d'une matrice \mathbf{M} qui associe chaque élément $\mathbf{M}_{i,j}$ au point $\mathbf{p}_{i,j}$ de \mathcal{C} discrétisé.
2. En chaque point $\mathbf{p}_{i,j}$ de \mathcal{C} , on vérifie si $\psi_{min} \leq \psi_i(\mathbf{p}_{i,j}) \leq \psi_{max}, i = 1, 2$.
3. Si $\mathbf{p} \notin \mathcal{W}_{DA}$, alors $\mathbf{M}_{i,j} = 0$, si $\mathbf{p} \in \mathcal{W}_{DA}$, alors $\mathbf{M}_{i,j} = 1$.
4. Une fois que tous les $\mathbf{p}_{i,j}$ ont été testés, on représente le contour de la surface plane dont les points sont les éléments non-nuls de \mathbf{M} , dont les coordonnées Cartésiennes dans le plan (x, y) sont leurs coordonnées dans la matrice \mathbf{M} .

Les résultats sont présentés dans le Tab. 3.1. Les meilleurs résultats sont en police grasse. Le ratio $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$ est meilleur pour le disque que pour le carré malgré les apparences de la Fig. 3.19 : 0.82 contre 0.79. La différence entre ces deux résultats est faible. C'est l'encombrement qui fait vraiment la différence : l'espace de travail \mathcal{W} calculé pour l'EDR circulaire est 50% plus grand que l'EDR carré. La différence entre les courses articulaire obtenues dans les deux cas est plus faible, avec un $\Delta\rho_{maxi}$ pour l'EDR circulaire supérieur de 25%.

On remarque que les points P_1 et P_3 en lesquels ψ_{max} est atteinte sont les extrémités de la diagonale de l'EDR carré (Fig. 3.19). La diagonale (P_1P_3) est aussi le diamètre du plus grand EDR circulaire.

Les plus grands EDR carré ou circulaire sont symétriques par rapport à l'axe de symétrie (Δ), donc les courses articulaires de chaque jambe sont égales dans les deux cas.

	Carré	Disque
Côté du carré / Diamètre du disque (m)	0.895	1.266
\mathcal{W}_{DR} (m ²)	0.801	1.259
\mathcal{W} (m ²)	1.014	1.531
$\Delta\rho_{maxi}$ (course maxi des liaisons actionnées en m)	1.001	1.266
$\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$	0.79	0.822

TAB. 3.1 – Comparaison des performances du Biglide pour un EDR carré ou circulaire

Faisons deux remarques sur cette première utilisation de la notion d'EDR ainsi que sur la comparaison des performances du Biglide selon l'indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$ pour deux formes différentes

de l'EDR. On rappelle que dans le cas où les butées articulaires ne sont pas prédéfinies on a $\mathcal{E} \equiv EDA$.

1. Le plus grand EDR circulaire inscrit dans \mathcal{E} a une surface supérieure à celle du plus grand EDR carré inscrit dans \mathcal{W} . La course articulaire calculée pour parcourir le plus grand EDR circulaire, notée $\Delta\rho_{circ}$, est supérieure à $\Delta\rho_{cub}$, la course articulaire calculée pour parcourir le plus grand EDR carré. $\Delta\rho_{circ}$ permet donc de parcourir une portion plus grande de l'EDA que $\Delta\rho_{cub}$. C'est-à-dire que le rapport $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}_{DA}$ est supérieur dans le cas de l'EDR circulaire (voir Fig. 3.19). Il vaut 0.9 pour l'EDR circulaire contre 0.82 pour l'EDR carré. De même, le rapport $\{\mathcal{W} \cap \mathcal{W}_{DA}\}/\mathcal{W}_{DA}$ est plus grand pour l'EDR circulaire que pour l'EDR carré (voir Fig. 3.19). Cependant, l'indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}_{DA}$ ne pénalise pas l'encombrement du volume de travail \mathcal{W} et des courses articulaires. Pour une PKM, l'encombrement est un critère important, donc cet indice nous semble donc moins pertinent que $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$ pour évaluer une PKM.
2. Le moyenne des FAV dans l'EDR est de 1.02 pour l'EDR circulaire et pour l'EDR carré. Ceci montre que les FAV sont répartis équitablement dans l'EDR par rapport à la moyenne des bornes qui vaut 1. L'EDR définit donc une zone de travail où la moyenne des FAV est proche d'une moyenne prédéterminée.

Lorsque les butées articulaires sont prédéfinies, l'encombrement du volume de travail et celui des courses articulaires ont déjà été intégrés dans le processus de conception. Aussi, les indices $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}_{DA}$ ou $\{\mathcal{W} \cap \mathcal{W}_{DA}\}/\mathcal{W}_{DA}$ deviennent pertinents. Nous allons donc traiter maintenant le cas où les butées articulaires sont prédéfinies.

Cas 2 : Les butées articulaires sont prédéfinies

Des butées articulaires prédéfinies définissent un espace $\mathcal{E} \equiv \mathcal{W} \cap EDA$ à l'intérieur duquel on va rechercher les plus grands EDR carré et circulaire. On utilise la méthode proposée dans [Majou 02] que l'on a décrite auparavant.

On choisit $\rho = 0$ à l'isotropie lorsque les deux jambes sont orthogonales. Sur la Fig. 3.20 sont représentés en exemple les plus grands EDR cubique et circulaire lorsque $\rho \in [-0.3, 0.3]$.

Lorsque les butées articulaires sont prédéfinies, on a $\mathcal{E} \equiv \mathcal{W} \cap EDA$. Dans ce cas, le plus grand EDR dépend des butées articulaires. Il ne suffit pas de définir la course $\Delta\rho = \rho_{max} - \rho_{min}$, il faut aussi définir la position des butées articulaires, c'est-à-dire les valeurs de ρ_{max} et ρ_{min} . Si par exemple $\Delta\rho = 0.6$, le plus grand EDR ne sera pas le même si $\rho_{max} = 0.5$ ou si $\rho_{max} = 0.1$.

Pour déterminer les butées articulaires qui donnent le plus grand EDR à $\Delta\rho$ fixé, il faut

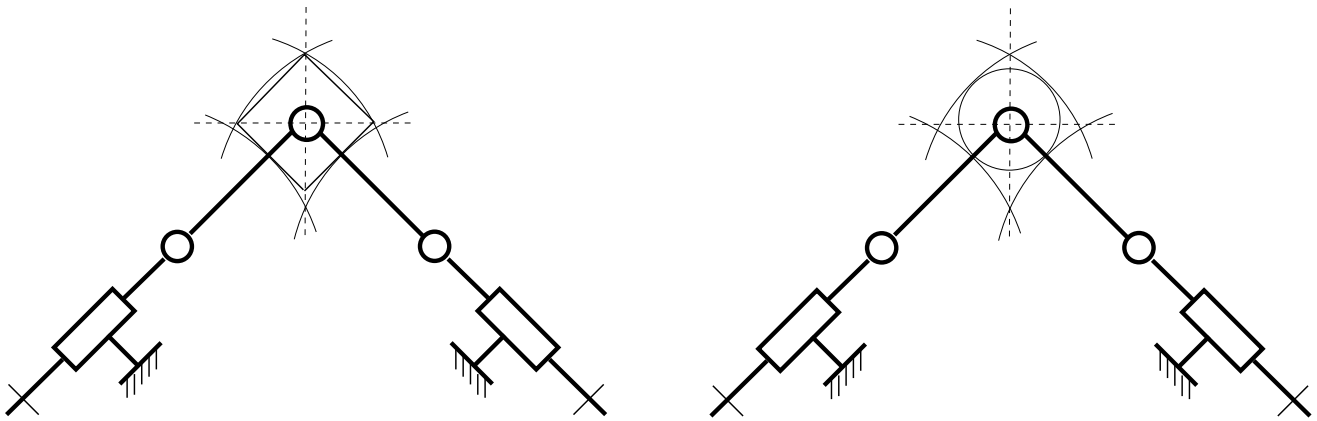


FIG. 3.20 – Plus grands EDR cubique et circulaire avec $\rho \in [-0.3, 0.3]$

tester des couples de butées articulaires (ρ_{min}, ρ_{max}) tels que $\Delta\rho = \rho_{max} - \rho_{min}$. Le Biglide possédant un axe de symétrie, la course articulaire (ρ_{min}, ρ_{max}) donnant le plus grand EDR sera la même pour les deux liaisons actionnées.

Pour chaque course articulaire (ρ_{min}, ρ_{max}) , on applique la méthode utilisée précédemment. On choisit le meilleur couple (ρ_{min}, ρ_{max}) . Les résultats sont présentés sur la Fig. 3.21.

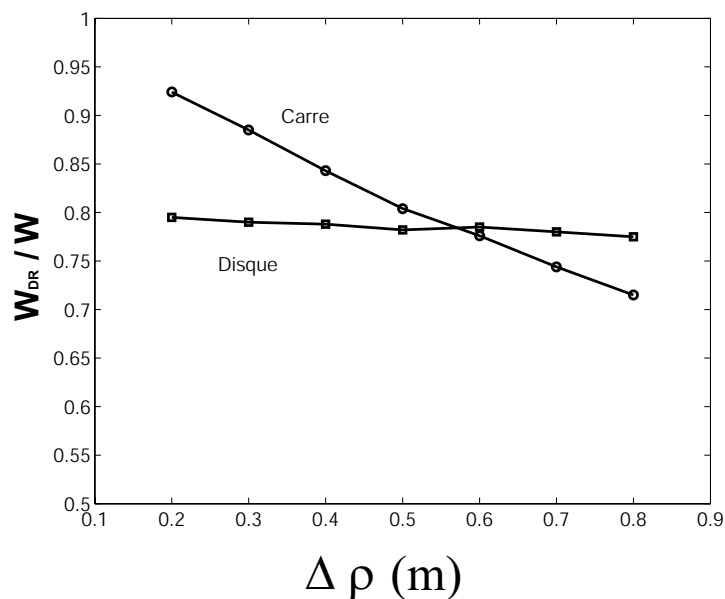


FIG. 3.21 – Indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$ pour un EDR carré ou circulaire, les butées articulaires étant prédéfinies

On constate que l'indice de performance $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$ diminue lorsque $\Delta\rho$ augmente, aussi bien pour l'EDR circulaire que carré. Cette diminution est faible pour l'EDR circulaire, elle est importante pour l'EDR carré.

L'indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$ de l'EDR carré est supérieur à l'indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$ de l'EDR circulaire lorsque $\Delta\rho \leq 0.56$, il est inférieur ensuite. On voit donc que l'indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$ varie selon les butées

articulaires choisies. Il est meilleur pour le carré lorsque $\Delta\rho$ est faible, meilleur pour le cercle lorsque $\Delta\rho$ est grand.

Dans le Tab. 3.1, on a donné les valeurs de $\Delta\rho_{max}$ calculées pour les plus grands EDR carré et circulaire inclus dans \mathcal{A} lorsque les butées articulaires ne sont pas prédéfinies. Dans le cas où les butées sont prédéfinies, d'après la Fig. 3.19 et les résultats du Tab. 3.1, on comprend bien que si $\Delta\rho \geq 1$ par exemple, alors le plus grand EDR carré inclus dans \mathcal{E} (avec $\mathcal{E} \equiv \mathcal{W} \cap EDA$ lorsque les butées sont prédéfinies) sera en fait le plus grand EDR carré inclus dans \mathcal{A} . L'indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$ va donc décroître dès que $\Delta\rho$ sera supérieur au $\Delta\rho_{max}$ déterminé dans le Tab. 3.1.

3.4.4 Choix de l'orientation de l'EDR

Afin d'illustrer l'influence de l'orientation de l'EDR sur l'indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$, deux orientations possibles sont envisagées pour un EDR carré. On se place tout d'abord dans le cas où les butées articulaires sont libres, puis dans le cas où elles sont prédéfinies.

Cas 1 : Les butées articulaires ne sont pas prédéfinies

Sur la Fig. 3.22 sont représentés les deux plus grands EDR carrés selon deux orientations différentes. Comme les butées articulaires ne sont pas prédéfinies, ces EDR sont les plus grands qu'il est possible d'atteindre dans l'EDA. Les résultats sont présentés dans le Tab. 3.2.

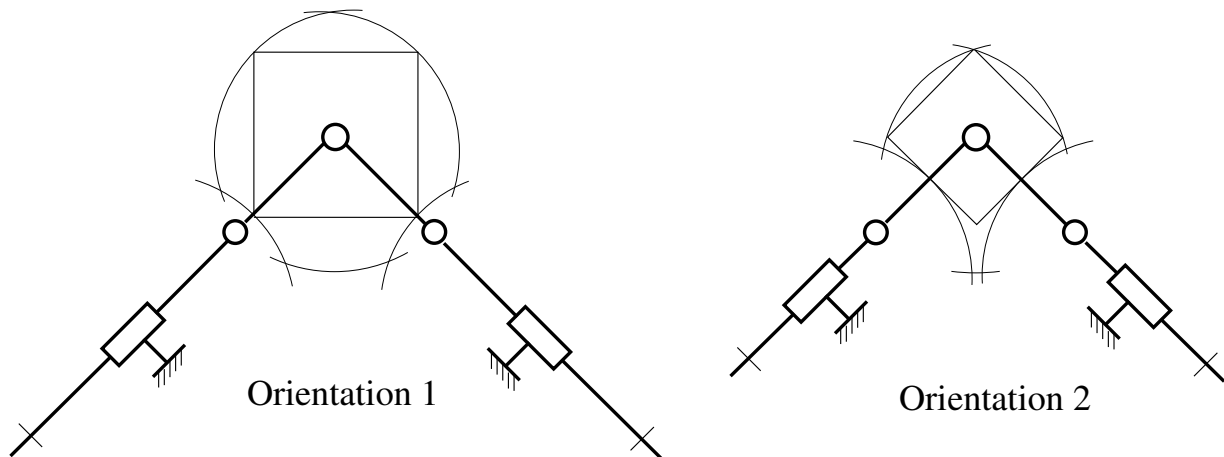


FIG. 3.22 – Deux orientations pour le plus grand EDR carré

On voit que l'indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$ est meilleur pour l'orientation 2 : 0.79 contre 0.66 pour l'orientation 1. De plus, on a calculé la moyenne des FAV. Elle vaut 1.04 pour l'orientation 1 contre 1.02 pour l'orientation 2. La notion d'EDR semble ici encore définir une zone de travail où la moyenne des FAV est proche d'une moyenne prédéterminée.

Le choix de l'orientation a donc un impact sur l'encombrement de la machine, à cause du

	Orientation 1	Orientation 2
Côté du carré (m)	1.18	0.895
\mathcal{W}_{DR} (m ²)	1.385	0.801
\mathcal{W} (m ²)	2.108	1.014
$\Delta\rho_{maxi}$ (m)	1.66	1
$\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$	0.66	0.79

TAB. 3.2 – Performances du Biglide pour un EDR carré orienté de deux façons différentes

volume de \mathcal{W} et de la taille des butées articulaires dans le cas d'actionneurs prismatiques. Le choix de l'orientation a aussi un impact sur le volume de l'EDR et l'indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$.

Cas 2 : Les butées articulaires sont prédéfinies

Lorsques les butées articulaires sont prédéfinies, elles définissent un espace $\mathcal{E} \equiv \mathcal{W} \cap EDA$ à l'intérieur duquel, pour illustrer les conséquences du choix de l'orientation de l'EDR, on va rechercher le plus grand EDR carré selon deux orientations différentes.

On voit nettement sur la Fig. 3.23 que l'indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$ sera toujours à l'avantage de l'orientation 2 quelles que soient les butées articulaires. Le choix de l'orientation a donc une influence importante. Si aucune contrainte n'oblige à orienter l'EDR d'une certaine façon, alors il faut l'orienter de telle sorte que l'indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$ soit le meilleur.

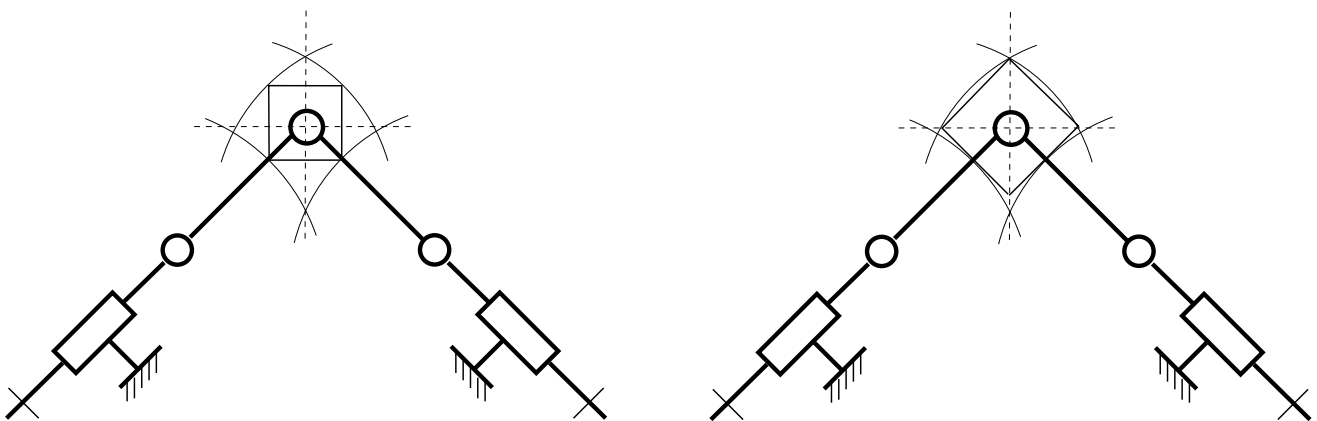


FIG. 3.23 – Plus grands EDR carrés pour des butées articulaires fixées et deux orientations différentes ($\rho_{max} = 0.3$, et $\rho_{min} = -0.3$)

3.5 Évaluation des performances de PKM spatiales à translations

Nous venons d'illustrer les conséquences des choix de la forme et de l'orientation de l'EDR sur l'indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$, dans le cas simple d'une PKM plane. Nous allons maintenant appliquer la notion d'EDR à l'évaluation de PKM spatiales à translations. Il y aura trois études :

1. Tout d'abord, nous évaluerons l'Orthoglide selon l'indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$, pour des formes et des orientations différentes de l'EDR ;
2. Ensuite, nous évaluerons l'Orthoglide selon l'indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$ lorsque la longueur des barres d'un des trois parallélogrammes varie ;
3. Enfin, nous évaluerons selon l'indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$ d'autres PKM spatiales à translations, et nous les comparerons entre elles.

Le but de ce paragraphe est d'illustrer l'intérêt d'un indice de performance basé sur la notion d'EDR pour évaluer et comparer entre elles (i), des versions alternatives d'une même PKM et (ii), des PKM d'une même famille.

Il serait très intéressant de comparer les résultats que nous allons obtenir avec ceux que l'on pourrait obtenir avec une machine-outil à translations sérielle.

Dans ce paragraphe et par la suite, les EDR seront tous calculés selon la méthode basée sur la discrétisation de l'espace de travail.

3.5.1 Modèle cinématique de la famille de l'Orthoglide

Le modèle cinématique de l'Orthoglide est le même que celui d'autres PKM à translations que nous évaluerons dans le paragraphe 3.5.4 et qui appartiennent à la même famille que l'Orthoglide, la famille des robot de type Delta linéaire. Nous allons présenter ce modèle cinématique.

La Fig. 3.24 montre l'architecture cinématique de l'Orthoglide.

Soient θ_i et β_i les variables articulaires des liaisons pivot du parallélogramme autour des axes \mathbf{i}_i and \mathbf{j}_i (Fig. 3.24). Soient ρ_1, ρ_2, ρ_3 les variables articulaires des liaisons prismatiques et soit L la longueur des barres des parallélogrammes des trois jambes, $A_i B_i$.

Le vecteur position \mathbf{p} de la pointe de l'outil P est défini dans un repère de référence (O, x, y, z) centré à l'intersection des trois axes des liaisons prismatiques (pour une meilleure lisibilité, le

repère de référence est translaté sur la Fig. 3.24). La position de l'origine du repère de référence sera précisée lorsque les autres PKM de la même famille seront évaluées.

Soient $\dot{\rho}$ le vecteur des variables articulaires des liaisons prismatiques actionnées et $\dot{\mathbf{p}}$ le vecteur vitesse du point P :

$$\dot{\rho} = [\dot{\rho}_1 \ \dot{\rho}_2 \ \dot{\rho}_3]^T, \quad \dot{\mathbf{p}} = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]^T$$

$\dot{\mathbf{p}}$ peut s'écrire de trois façons différentes en utilisant les trois chaînes $A_i B_i P$:

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{e}_i \dot{\rho}_i + (\dot{\theta}_i \mathbf{i}_i + \dot{\beta}_i \mathbf{j}_i) \times (\mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i) \quad (3.2)$$

où \mathbf{a}_i et \mathbf{b}_i sont les vecteurs position des points A_i and B_i , respectivement, et \mathbf{e}_i est la direction des trois axes des liaisons prismatiques, avec $i = 1, 2, 3$.

Pour éliminer les vitesses articulaires des liaisons passives, $\dot{\theta}_i$ et $\dot{\beta}_i$, on multiplie l'Eq. 3.2 par $\mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i$:

$$(\mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i)^T \dot{\mathbf{p}} = (\mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i)^T \mathbf{e}_i \dot{\rho}_i \quad (3.3)$$

L'Eq. 3.3 peut s'écrire vectoriellement sous la forme $\mathbf{A} \dot{\rho} = \mathbf{B} \dot{\mathbf{p}}$, où \mathbf{A} et \mathbf{B} sont respectivement les matrices Jacobienne parallèle et sériele :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1)^T \\ (\mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_2)^T \\ (\mathbf{b}_3 - \mathbf{a}_3)^T \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \eta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_3 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

avec $\eta_i = (\mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i)^T \mathbf{e}_i$ pour $i = 1, 2, 3$.

Les singularités parallèles apparaissent lorsque le déterminant de \mathbf{A} s'annule, *i.e.* quand $\det(\mathbf{A}) = 0$. L'Eq. 3.4 montre que les singularités parallèles apparaissent lorsque :

$$(\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1) = \alpha(\mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_2) + \lambda(\mathbf{b}_3 - \mathbf{a}_3)$$

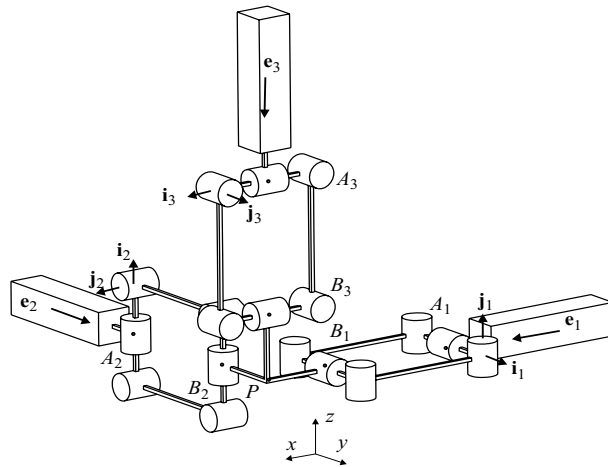


FIG. 3.24 – Architecture cinématique de l'Orthoglide

c'est-à-dire quand les points A_1, B_1, A_2, B_2, A_3 et B_3 sont des plans parallèles entre eux. Un cas particulier se produit lorsque les membrures $A_i B_i$ sont parallèles entre elles :

$$\begin{aligned} (\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1) &\parallel (\mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_2) \quad \text{et} \\ (\mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_2) &\parallel (\mathbf{b}_3 - \mathbf{a}_3) \quad \text{et} \\ (\mathbf{b}_3 - \mathbf{a}_3) &\parallel (\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1) \end{aligned}$$

Les singularités sérielles se produisent lorsque la matrice Jacobienne sérielle \mathbf{B} n'est plus inversible *i.e.* quand $\det(\mathbf{B}) = 0$. Si l'on se trouve à une singularité sérielle, il existe une direction le long de laquelle aucune vitesse Cartésienne ne peut être produite. L'Eq. 3.4 montre que $\det(\mathbf{B}) = 0$ quand on a pour une jambe i , $(\mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i) \perp \mathbf{e}_i$.

Quand \mathbf{B} n'est pas singulière, on peut écrire,

$$\dot{\rho} = \mathbf{J}^{-1} \dot{\mathbf{p}} \quad \text{with} \quad \mathbf{J}^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \quad (3.5)$$

3.5.2 Évaluation des performances de l'Orthoglide pour des EDR cubique, cylindrique, sphérique.

Choix de la forme de l'EDR

Nous allons expliquer l'intérêt de choisir un EDR cubique, cylindrique ou sphérique pour évaluer l'Orthoglide selon l'indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$.

L'espace de travail des machines-outil sérielles classiques a une forme parallélépipédique, et c'est pour se rapprocher de cette forme que l'une des formes choisies pour l'EDR est le cube. On pourrait aussi choisir une forme parallélépipédique. Cela permet de s'adapter aux formes courantes des pièces à usiner. Le choix de la forme de l'EDR dépend de la tâche pour laquelle on veut évaluer la machine.

Pour une PKM spatiale à translations, rechercher le plus grand EDR cylindrique a un sens si celle-ci est destinée à devenir une PKM d'architecture main droite / main gauche, où la pièce à usiner est montée sur un plateau tournant. Dans ce cas, il est possible d'usiner des pièces cylindriques dont l'axe de révolution est celui du plateau et qui sont fixées sur le plateau tournant. L'axe de l'EDR cylindrique sera l'axe du plateau tournant. La PKM considérée dans ce cas est de type 3T-1R (3 translations, 1 rotation), et la notion d'EDR cylindrique pour l'évaluer selon l'indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$ est tout à fait justifiée.

Évaluer une PKM spatiale à translations selon l'indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$ à partir du plus grand EDR sphérique est justifié dans le cas d'une d'architecture main droite / main gauche, ou d'une

architecture hybride dont les mécanismes de positionnement et d'orientation sont découplés. Par exemple si l'on remplace le plateau tournant par un poignet rotatif à deux DDL (main droite / main gauche), ou si l'on considère une PKM de type Tricept ou Orthoglide 5 axes (PKM hybrides, voir figs. 2.24 et 2.25) dont le mécanisme d'orientation est indépendant du mécanisme de positionnement. Dans ces cas-là, le choix d'un EDR sphérique est justifié, mais sa pertinence est liée au débattement angulaire. S'il est faible, les possibilités d'usiner des formes sphériques sont limitées et on préférera une machine de tournage. L'EDR sphérique est bien adapté pour évaluer la PKM Eclipse (Fig. 2.21) qui possède des débattements angulaires de 360 degrés. Une synthèse sur les PKM à forts débattements angulaires est présentée dans [Krut 03].

Nous allons maintenant passer à l'évaluation de l'Orthoglide.

Cas 1 : Les butées articulaires ne sont pas définies

Nous allons comparer dans ce paragraphe les performances de l'Orthoglide selon l'indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$, les butées articulaires étant libres. On calcule les plus grands EDR cubique de côté L , cylindrique de hauteur L et de rayon $L/2$, sphérique de diamètre L (Fig. 3.3). Les butées articulaires correspondantes sont calculées. Deux orientations différentes sont proposées pour les EDR cubique et cylindrique : l'orientation "verticale" et l'orientation "diagonale" (l'axe du cylindre est selon l'axe $x = y = z$).

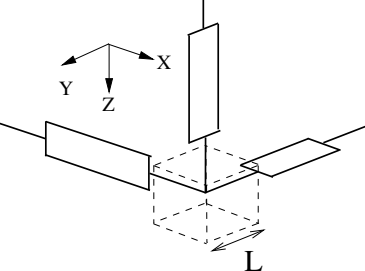
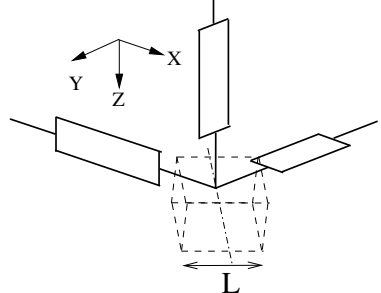
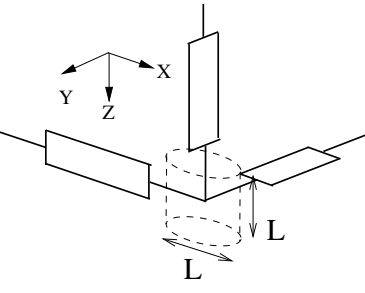
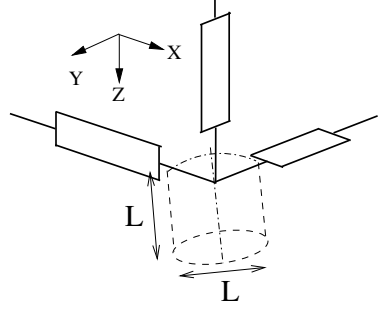
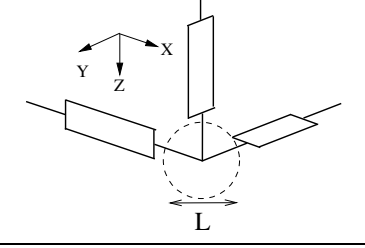
L'Orthoglide a été optimisé dans [Chablat 03] pour contenir le plus grand EDR cubique "vertical" tel que les FAV soient compris entre $1/2$ et 2 . Nous avons conservé ces limites, c'est-à-dire que nous avons cherché le plus grand EDR tel qu'à l'intérieur les FAV soient bornés par $1/2$ et 2 . La longueur des jambes vaut 1 . Les résultats sont présentés dans le Tab. 3.4.

On remarque que le choix de la forme et de l'orientation de l'EDR influent sur l'indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$. C'est surtout l'orientation qui est importante. C'est le plus grand EDR cylindrique "vertical" qui donne le meilleur indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$.

Le plus grand EDR qu'il est possible d'inclure dans l'espace de travail de l'Orthoglide est l'EDR sphérique, qui donne la deuxième meilleure performance selon l'indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$.

Les EDR "diagonaux" sont plus grands que les EDR "verticaux", mais ils donnent les plus mauvais indices $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$ parce que le volume de \mathcal{W} atteignable avec les butées articulaires calculées pour parcourir l'EDR est important. Ceci traduit une mauvaise compacité de l'Orthoglide pour usiner des pièces parallélépipédiques ou cylindriques orientées selon l'axe $x = y = z$. C'est dommage, parce que l'orientation diagonale de l'Orthoglide, c'est-à-dire selon l'axe $x = y = z$ (Fig. 3.25), est intéressante vis-à-vis de plusieurs critères :

1. L'accessibilité aux pièces à usiner est facilitée.

	
EDR cubique "vertical"	EDR cubique dextre "diagonal"
	
EDR cylindrique "vertical"	EDR cylindrique "diagonal"
	
EDR sphérique	

TAB. 3.3 – Calcul des plus grands EDR cubique, cylindrique, sphérique de l'Orthoglide

	EDR cubique		EDR cylindrique		EDR sphérique
	Vertical	Diagonal	Vertical	Diagonal	
L (m)	0.642	0.797	0.674	0.871	1.06
\mathcal{W}_{DR} (m ³)	0.265	0.506	0.337	0.52	0.623
\mathcal{W} (m ³)	0.571	1.89	0.635	1.64	1.233
$\Delta\rho_{maxi}$ (m)	0.822	1.36	0.871	1.22	1.067
$\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$	0.463	0.268	0.53	0.317	0.505

TAB. 3.4 – Performances de l'Orthoglide selon l'indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$ pour différents EDR

2. Les risques de collision entre les jambes et les pièces à usiner sont moindres.
3. La direction $x = y = z$ est la direction selon laquelle la raideur cinématique de l'Orthoglide est maximale. Sur la Fig. 3.26, on a représenté l'évolution de la raideur cinématique k_z selon l'axe Z pour les orientations initiale et diagonale. On a utilisé le modèle de rigidité de [Gosselin 90]. On a fixé arbitrairement la raideur des liaisons prismatiques actionnées à

10^5 N.mm^{-1} . On voit que pour $Z \geq 0$, la raideur de l'orientation diagonale est supérieure à la raideur selon l'axe Z de l'orientation initiale. Pour $Z \leq 0$, la raideur diagonale est toutefois inférieure.

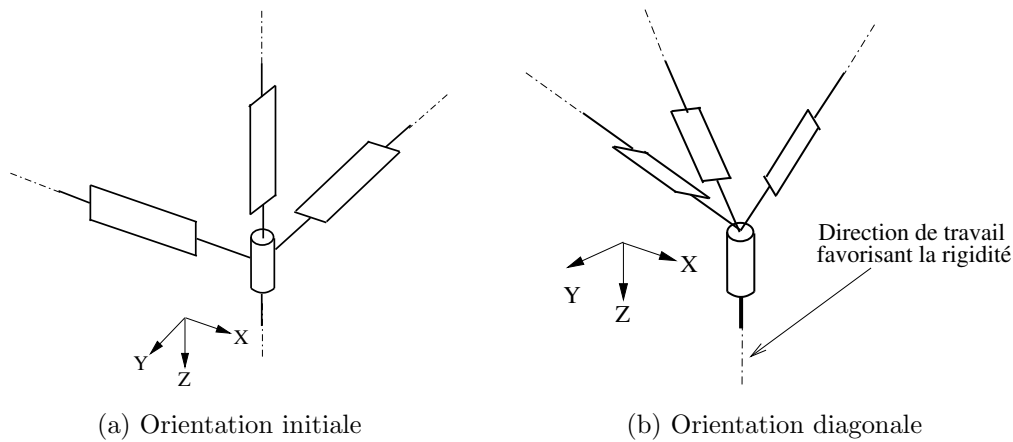


FIG. 3.25 – Deux orientations différentes de l'Orthoglide

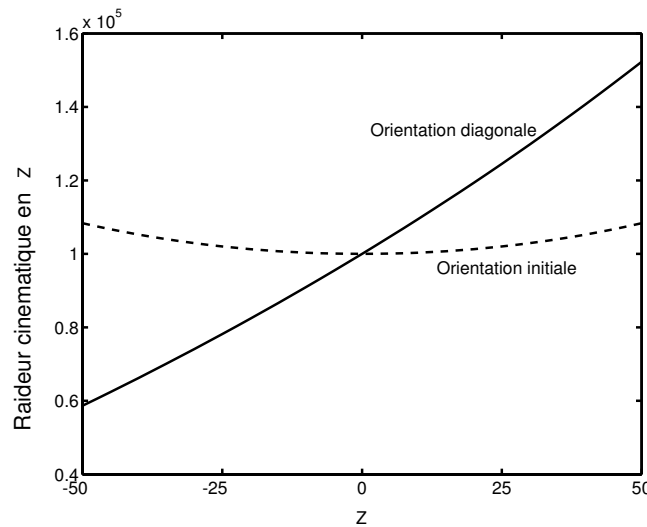


FIG. 3.26 – Évolution de la raideur cinématique selon l'axe Z , pour l'orientation classique et diagonale de l'Orthoglide

Qu'une PKM ait une direction de travail qui privilégie la rigidité est intéressant pour des usinages particuliers de type perçage-lamage-taraudage, comme par exemple l'UraneSX [Company 02] (Fig. 2.37).

L'orientation diagonale de l'Orthoglide ressemble à la PKM 6 axes HexaM de Toyoda [Pierrot 98] (Fig. 2.20). Le choix des concepteurs de l'HexaM est sans doute lié aux avantages de la configuration diagonale que nous venons d'expliquer.

Dans sa version finale, la jambe de l'Orthoglide possède un pied (Fig. 3.27, voir aussi fig. 3.8) qui permet d'éloigner le parallélogramme du guidage prismatique. Ceci permet d'accroître le volume de travail en évitant les collisions entre les barres du parallélogramme et le guidage

prismatique. De plus, le volume de travail gagné possède des performances cinétostatiques homogènes. Les jambes de l'HexaM ne possèdent pas de pied, donc une partie du volume de travail aux performances homogènes n'est pas disponible. En contrepartie, on voit sur la Fig. 3.26 que la raideur selon l'axe Z lorsque $Z \leq 0$ est moins bonne. Donc si la rigidité est un critère prépondérant, le pied est inutile. D'autant plus que le pied est une pièce très critique pour la rigidité, comme nous le verrons dans le chapitre 4.

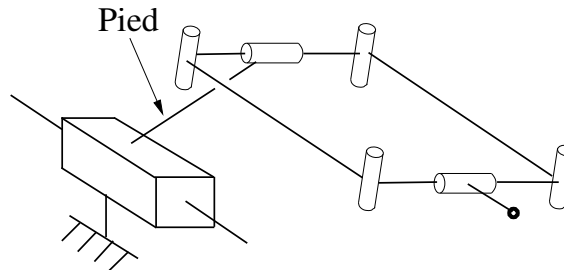


FIG. 3.27 – Jambe de l'Orthoglide

Cas 2 : les butées articulaires sont prédéfinies

Nous allons évaluer l'indice \mathcal{W}_{DR}/W pour des EDR cubique et cylindrique lorsque les butées articulaires sont prédéfinies. Les résultats sont présentés sur la Fig. 3.28. On choisit $\rho = 0$ lorsque l'on est à l'isotropie.

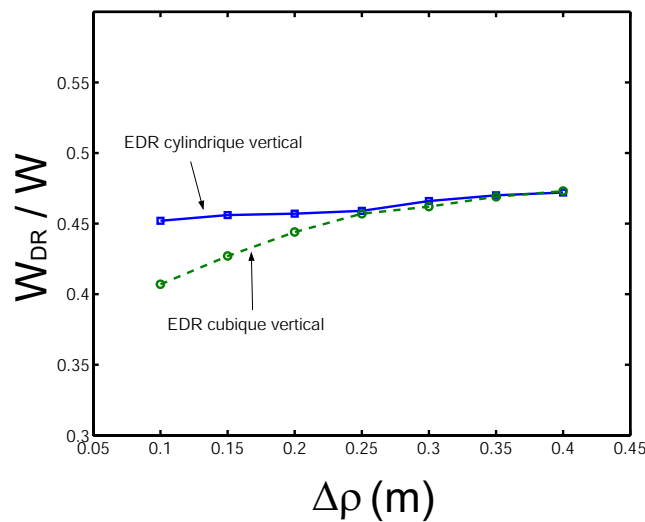


FIG. 3.28 – Évaluation des performances de l'Orthoglide selon l'indice \mathcal{W}_{DR}/W pour les plus grands EDR cubique et cylindrique avec des butées articulaires fixées

On constate que l'indice \mathcal{W}_{DR}/W augmente avec la course articulaire. \mathcal{W}_{DR}/W augmente néanmoins plus vite dans le cas d'un EDR cubique. L'indice \mathcal{W}_{DR}/W est meilleur pour $\Delta\rho$ faible si l'on considère un EDR cylindrique, l'écart d'indice entre EDR cubique et cylindrique se réduit lorsque la course articulaire augmente, et les deux courbes se confondent lorsque $\Delta\rho$ s'approche de 0.4.

3.5.3 Évaluation des performances de l'Orthoglide lorsque la longueur d'une jambe varie

Nous allons maintenant évaluer des versions alternatives de l'Orthoglide avec le nouvel indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$. La longueur L_3 des barres du parallélogramme de la jambe verticale va varier entre 0.5 et 2.5 fois la longueur L des deux autres jambes. L'indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$ sera évalué pour chaque valeur de L_3 , les butées n'étant pas prédéfinies (Fig. 3.29). Deux formes d'EDR sont testées : EDR cubique vertical et EDR cylindrique vertical dont le diamètre est égal à la hauteur.

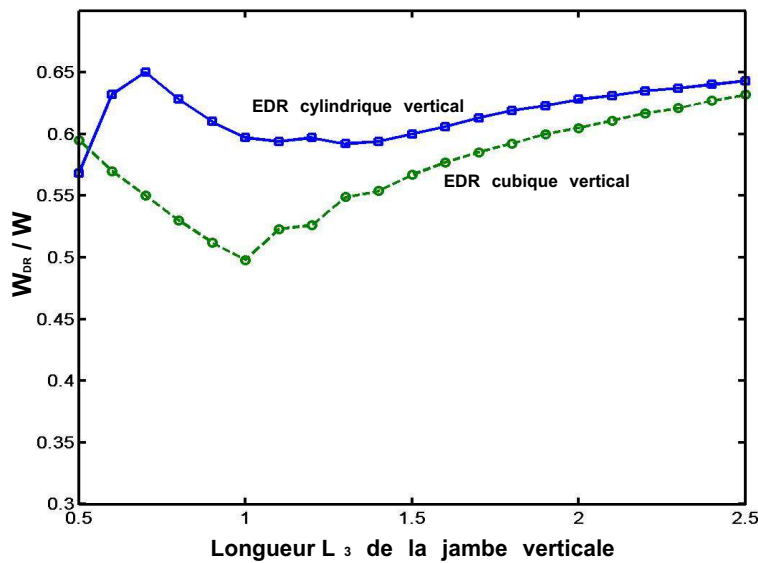


FIG. 3.29 – Évaluation de l'indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$ pour les plus grands EDR cubique et cylindrique verticaux lorsque L_3/L varie

On constate que pour L_3 variant de 0.5 à 1, les courbes obtenues sont étonnamment irrégulières, notamment lorsqu'on les compare à celles obtenues pour L_3 variant de 1 à 2.5, qui sont plus régulières. La source d'erreur la plus probable est la recherche manuelle du centre de l'EDR, dont découlent les grandeurs (dimensions de l'EDR, butées articulaires) qui permettent de calculer $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$.

Nous ferons donc nos observations uniquement pour L_3 variant de 1 à 2.5.

L'indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$ est meilleur pour l'EDR cylindrique vertical. Lorsque L_3/L augmente, l'indice de l'EDR cubique se rapproche de l'indice de l'EDR cylindrique. Un Orthoglide tel que la longueur d'un des parallélogrammes vaut 2.5 fois la longueur des deux autres sera donc presque aussi satisfaisant vis-à-vis de l'indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$ pour un EDR cubique que pour un EDR cylindrique. Ce qui en fait une PKM globalement plus performante vis-à-vis des deux indices.

Si la jambe telle que $L_3=2.5L$ est la jambe verticale, l'indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$ est meilleur que lorsque

$L_3=L$ sans que l'Orthoglide augmente son empreinte au sol, ce qui est un point intéressant.

Comparons maintenant les résultats obtenus pour le calcul du volume de l'EDR cubique en utilisant les deux méthodes de détermination présentées dans le paragraphe 3.3. Sur la Fig. 3.30, on a représenté l'évolution de \mathcal{W}_{DR} en fonction de L_3 . On constate que les résultats obtenus avec les deux méthodes sont assez proches, mais que les volumes calculés avec la méthode discrète sont toujours plus grands que ceux calculés avec la méthode ALIAS. La méthode ALIAS est plus fiable car elle garantit le volume de l'EDR à 10^{-3} près, alors que la méthode discrète n'est pas garantie.

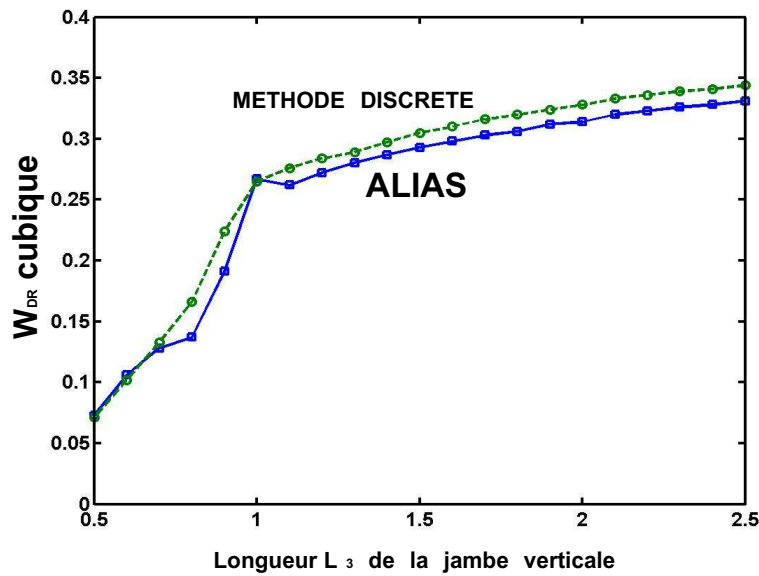


FIG. 3.30 – Comparaison du volume de l'EDR cubique en fonction de la méthode utilisée lorsque L_3 varie

Remarque : Si $L_3=2.5L$, la rigidité en torsion du parallélogramme pourrait diminuer. On verra dans le paragraphe 4.8 avec un modèle de rigidité que cela ne pose pas de problèmes. Il faut par contre vérifier la résistance au flambement car il se peut que les efforts transmis par les barres dépassent la valeur admissible. La charge critique N vaut : $N = \pi^2 EI / L^2$. E est le module d'Young en MPa, I le moment quadratique de la section de la barre en mm^2 . On voit que la charge critique est divisée par 6.25 si la longueur d'une des barres est multipliée par 2.5. Dans le cas du prototype de l'Orthoglide construit à l'IRCCyN on a (matériau aluminium, $I = 1480 \text{ mm}^2$, $L = 310 \text{ mm}$) : $N = 12 \text{ kN}$.

En général, les efforts de coupe en UGV sont de l'ordre de 100 à 300N pour des matériaux métalliques, donc il n'y a pas de risque de flambement lorsque $L_3=2.5L$.

3.5.4 Comparaison de l'Orthoglide avec d'autres PKM à translations

Le but de cette partie est de montrer comment on peut utiliser la notion d'EDR pour comparer et classer des PKM, par exemple en utilisant l'indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$.

3.5.4.1 Comparaison de l'Orthoglide avec l'UraneSX en utilisant l'analyse par intervalles

L'UraneSX est une PKM à trois translations de la même famille que l'Orthoglide : elle possède trois jambes munies de parallélogrammes reliés à trois liaisons prismatiques actionnées dont les axes sont parallèles et équidistants. Sur la Fig. 3.31, on présente un schéma simplifié de l'UraneSX et son architecture cinématique avec le paramétrage. Les axes des liaisons prismatiques sont les génératrices d'un cylindre de rayon R . On choisit $L = 1$, $r = 3/26$ et $R = 7/13$, où r est le rayon de la plate-forme mobile et L la longueur des barres du parallélogramme. Les paramètres géométriques R et r que nous allons utiliser sont tirés de [Company 02]. L'origine du repère de référence (O, x, y, z) se trouve sur l'axe de symétrie du cylindre de rayon R sur lequel sont placées les liaisons prismatiques actionnées. Peu importe la valeur de la coordonnée de l'origine selon l'axe Z car l'espace de travail de l'UraneSX est illimité selon cette direction.

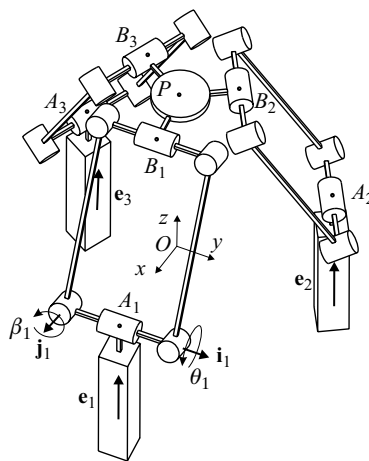


FIG. 3.31 – La PKM UraneSX, architecture et paramétrage

La méthode de détermination du plus grand EDR cubique, basée sur l'analyse par intervalles et présentée dans [Chablat 04], est décrite dans le paragraphe 3.3.3. Elle est appliquée à la recherche du plus grand EDR cubique “vertical” contenu dans l'espace de travail de l'Orthoglide et de l'UraneSX, les butées articulaires étant non-fixées. Les FAV sont compris entre $1/2$ et 2 . On compare ensuite l'Orthoglide et l'UraneSX selon l'indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$.

Grâce à la symétrie de son architecture cinématique, l'espace de travail Cartésien de l'Orthoglide a une forme assez régulière dans laquelle il est possible d'inclure un cube dont les côtés

sont parallèles aux plans xy , yz et xz , respectivement (Fig. 3.32).

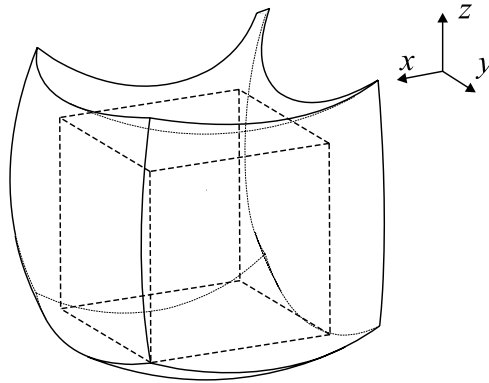


FIG. 3.32 – Espace de travail de l'Orthoglide

L'UraneSX ne possède pas cette caractéristique. Son espace de travail est l'intersection de trois cylindres dont les axes sont parallèles à l'axe Z . L'espace de travail est donc théoriquement illimité selon la direction Z et la matrice Jacobienne ne dépend pas de la coordonnée z . Seules les limites articulaires définissent les limites de l'espace de travail selon la direction Z . Pour déterminer le plus grand EDR cubique inclus dans l'espace de travail (Fig. 3.33), il suffit donc de déterminer le plus grand EDR carré dans le plan xy . À la course articulaire nécessaire pour parcourir ce carré, on ajoute la longueur du côté du cube dextre afin que les butées articulaires permettent à l'outil de parcourir tout l'EDR cubique.

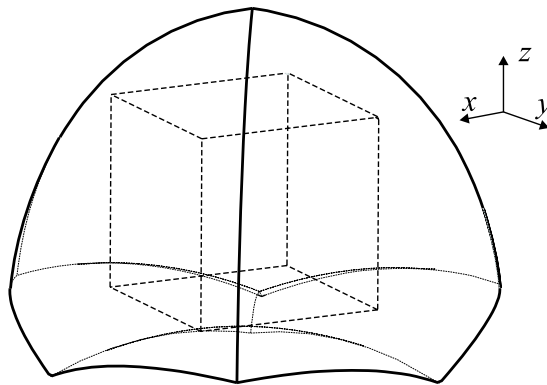


FIG. 3.33 – Espace de travail de l'UraneSX

Contraintes géométriques

Pour diminuer le temps de calcul et éviter les configurations singulières qui posent des problèmes numériques à l'algorithme utilisé, il faut ajouter des contraintes géométriques.

Le polynôme \mathcal{P} (voir paragraphe 3.3.3.2) est ainsi défini pour les points situés à l'intersection de trois cylindres définis par

$$x^2 + y^2 \leq L \quad x^2 + z^2 \leq L \quad y^2 + z^2 \leq L$$

pour l'Orthoglide, et par

$$\begin{aligned} (x - R + r)^2 + y^2 &\leq L \\ \left(x - (R - r)\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - (R - r)\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 &\leq L \\ \left(x - (R - r)\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + (R - r)\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 &\leq L \end{aligned}$$

pour l'UraneSX.

Résultats

Pour l'Orthoglide, on trouve les mêmes résultats que dans le paragraphe 3.5.2 lorsque les butées ne sont pas prédéfinies. La position et la taille du plus grand EDR cubique définissent les courses Cartésiennes de la plate-forme mobile :

$$\begin{aligned} x &= [-0.322 + 0.085, 0.322 + 0.085] \\ y &= [-0.322 + 0.085, 0.322 + 0.085] \\ z &= [-0.322 + 0.085, 0.322 + 0.085] \end{aligned}$$

Pour l'UraneSX, on calcule les courses Cartésiennes de la plate-forme mobile pour le plus grand EDR carré situé dans le plan xy :

$$\begin{aligned} x &= [-0.255 - 0.018, 0.255 - 0.018] \\ y &= [-0.255, 0.255] \end{aligned}$$

On retrouvera ces résultats dans le paragraphe suivant en utilisant la méthode basée sur la discrétisation de l'espace de travail.

D'autre part, on a fait varier le rayon du cylindre sur lequel se trouvent les guidages prismatiques de l'UraneSX. Si l'on note R' le rayon variable, on peut écrire $R' = R + \lambda$ avec $\lambda \in [0.0, 0.2]$. Pour $R' < 7/13$, les contraintes imposées sur les FAV ne sont pas satisfaites, c'est-à-dire qu'il n'est pas possible de déterminer un EDR dans lequel les FAV sont compris entre 1/2 et 2. On choisit donc $\lambda > 0$. La valeur optimale de R' est atteinte pour $\lambda = 0$ (voir Tab. 3.5), c'est-à-dire pour la valeur R définie dans [Company 02]. $L_{W_{DR}}$ est la longueur du côté de l'EDR carré.

Les résultats de la comparaison des deux PKM sont donnés dans le Tab. 3.6. L'indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$ est meilleur pour l'Orthoglide que pour l'UraneSX. Le volume de travail est à peu près le même pour les deux PKM. Il faut noter que l'indice de performance choisi (indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$, FAV compris entre 1/2 et 2) évalue comme "bonne" une PKM aux performances cinéostatiques homogènes. En effet, les bornes $[1/2; 2]$ qui limitent les FAV s'appliquent de

façon isotrope, c'est-à-dire quelle que soit la direction de déplacement de l'outil. Or l'UraneSX est une machine destinée à des opérations de perçage-lamage-taraudage, pour lesquelles une bonne rigidité est requise selon la direction de perçage, mais pas selon les autres directions. Son indice "inférieur" à celui de l'Orthoglide doit donc être relativisé. On verra dans le paragraphe 3.6 comment adapter le calcul de l'indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$ lorsque les bornes des FAV dépendent de la direction de déplacement de l'outil.

Choix d'une autre forme pour l'EDR

Comme nous l'avons déjà écrit, il peut être intéressant d'évaluer l'indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$ pour d'autres formes de l'EDR. L'algorithme présenté dans [Chablat 04] peut être modifié pour rechercher par exemple le plus grand EDR sphérique. Il suffit d'utiliser des coordonnées sphériques et de remplacer x , y et z par $x_c + r \sin \psi \sin \theta$, $y_c + r \cos \psi \sin \theta$, $z_c + r \cos \theta$, avec $r \in [0, R]$, $\psi, \theta \in [0, 2\pi]$, x_c, y_c, z_c étant les coordonnées du centre de la sphère et R son rayon. L'analyse par intervalles permet de traiter des expressions en *cos* et en *sin* et donc les modules \mathcal{M}, \mathcal{G} peuvent être utilisés avec ces nouveaux paramètres.

Les sphères et les cubes sont définis par leur centre et un paramètre additionnel. Mais d'autres formes de l'EDR comme le cylindre sont définis par un centre, un rayon et une hauteur. Si l'on choisit d'évaluer l'indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$ pour un EDR cylindrique, la procédure $\mathcal{C}(x_M, y_M, z_M)$ doit être modifiée pour optimiser les dimensions de l'EDR cylindrique en fonction de deux paramètres. Il faut alors faire attention : le résultat de la procédure d'optimisation pourrait être un cylindre avec un petit rayon et une grande hauteur, ce qui a peu d'intérêt pour une PKM. Un cylindre dont la hauteur h et le diamètre D sont identiques est plus intéressant et c'est pourquoi nous avons fait ce choix dans les paragraphes 3.5.2 et 3.5.3. Dans ce cas, la procédure \mathcal{C} doit résoudre un problème d'optimisation dont l'objectif est de maximiser le volume d'un cylindre dans lequel les FAV sont bornés et tel que le ratio D/h vérifie $a \leq D/h \leq b$. ALIAS est capable de gérer une telle procédure d'optimisation.

λ	Position du centre	$L_{W_{DR}}$
0.00	(-0.0178,-0.0045)	0.510
0.05	(-0.0179,-0.0022)	0.470
0.10	(-0.0225,-0.0031)	0.420
0.15	(-0.0245,-0.0018)	0.370
0.20	(-0.0211,-0.0033)	0.320

TAB. 3.5 – Variation en fonction de λ de la longueur du côté de l'EDR carré de l'UraneSX

	\mathcal{W}	\mathcal{W}_{DR}	$\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$
Orthoglide	0.566	0.265	46.8%
UraneSX	0.544	0.132	24.3%

TAB. 3.6 – Résultats de la comparaison entre l'Orthoglide et l'UraneSX

3.5.4.2 Comparaison de l'Orthoglide avec d'autres PKM à translations

Nous allons compléter ces premiers résultats en évaluant d'autres PKM spatiales à translations selon l'indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$. Nous comparerons ces PKM entre elles. Les PKM à translations de type LTPM (voir paragraphe 2.2.3.2), isotropes dans tout leur espace de travail, ne sont pas prises en compte. D'une part, l'indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$ sera toujours égal à 1, donc ces PKM ne nécessitent pas d'analyse plus approfondie. D'autre part, ces PKM ne sont pas de bonnes candidates pour l'usinage comme nous l'avons expliqué dans le paragraphe 2.2.3.2. Or la notion d'EDR est surtout intéressante pour les PKM destinées à l'usinage.

Nous allons d'abord présenter les différentes PKM qui seront évaluées et comparées. Les trois premières sont, comme l'Orthoglide et l'UraneSX, des PKM de type Delta linéaire :

1. Le PKM de type Y-STAR, qui possède trois jambes munies de parallélogrammes reliés à trois liaisons prismatiques actionnées coplanaires qui s'intersectent en formant entre elles un angle valant $2\pi/3$ [Hervé 92] (Fig. 3.34) ;

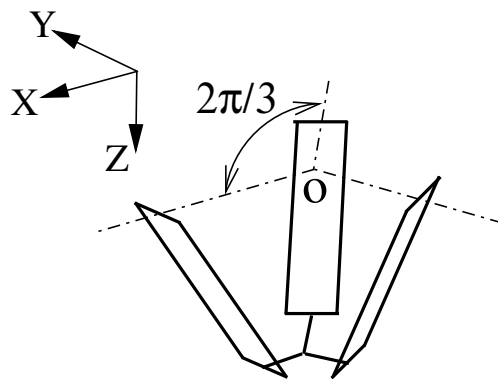


FIG. 3.34 – Le Y-Star

2. La PKM dite Hybrid-glide, qui possède trois jambes munies de parallélogrammes reliés à trois liaisons prismatiques actionnées dont deux des axes sont parallèles, le troisième étant orthogonal aux deux autres et situé dans leur plan médian (Fig. 3.35). La distance d vaut $1/1.7$ fois la longueur des barres du parallélogramme. Nous avons choisi $d = 1/1.7$ parce que cette valeur donne un bon indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$, mais nous n'avons pas optimisé d mathématiquement en essayant de maximiser $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$. L'Hybrid-glide est mentionnée dans [Company 00].

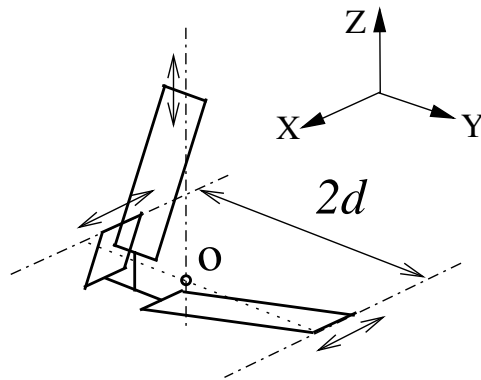


FIG. 3.35 – L'Hybrid-glide

3. La PKM Triaglide (voir paragraphe 2.2.3.5) qui possède trois jambes munies de parallélogrammes reliés à trois liaisons prismatiques actionnées, dont les axes sont parallèles et coplanaires (Fig. 3.36). La distance d a été choisie égale à $1/3$ de la longueur des barres du parallélogramme, ce qui est approximativement la valeur choisie pour la PKM de la Fig. 2.36. Pour cette PKM comme pour l'UraneSX, l'espace de travail possède une direction selon laquelle les déplacements sont théoriquement illimités. Il s'agit ici de la direction X . La matrice Jacobienne de la PKM Triaglide ne dépend pas de x .

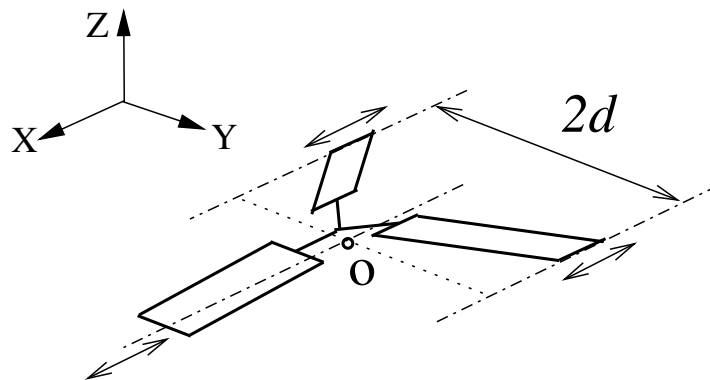


FIG. 3.36 – Le Triaglide

4. La PKM de type 3-UPU, assemblée pour avoir un mouvement de translation (Fig. 3.37, voir aussi le paragraphe 2.2.3.4). Un paramètre géométrique important est le rapport homothétique entre la plate-forme de base et la plate-forme mobile. Nous avons choisi celui obtenu dans [Tsai 00] en optimisant l'indice de conditionnement global : $e = 0.37$.

Nous allons comparer ces PKM selon l'indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$ pour les plus grands EDR cylindrique et cubique, ce qui permettra de mesurer l'aptitude de ces PKM à l'usinage selon les critères qui nous semblent importants (performances cinéto-statiques, forme de l'espace de travail). Les résultats sont présentés dans les Tab. 3.7 et 3.8. Le Tab. 3.7 représente graphiquement les PKM et l'EDR déterminé pour chacune d'elles, et le Tab. 3.8 présente les résultats obtenus sous forme numérique.

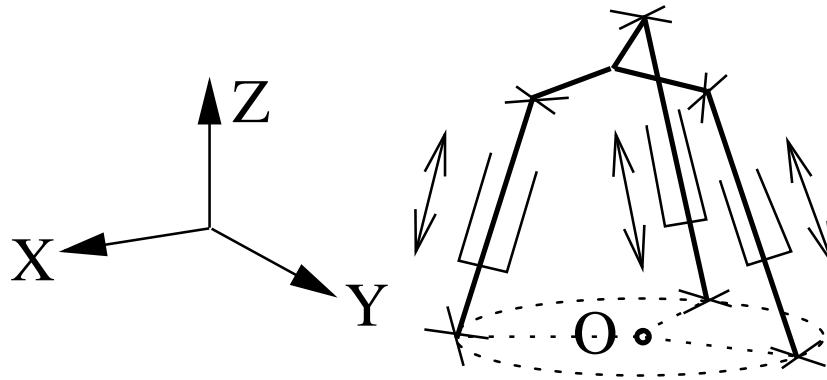


FIG. 3.37 – Le 3-UPU

Pour chaque PKM, l'aspect \mathcal{A} dans lequel est calculé le plus grand EDR est celui dans lequel la PKM “travaille” habituellement [Tsai 00], [Company 00], [Tremblay 99], [Chablat 03]. L'aspect choisi possède donc à priori de bonnes performances cinéto-statiques et un volume de travail assez important.

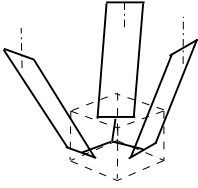
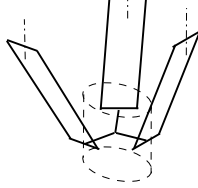
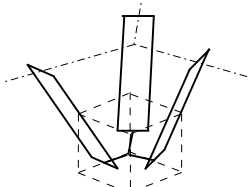
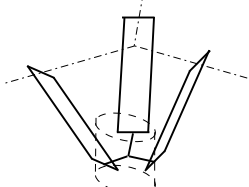
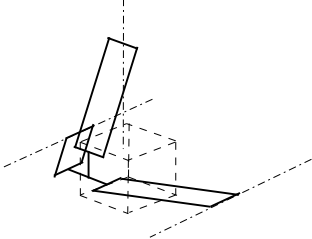
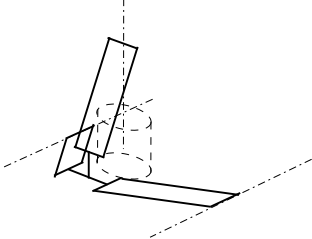
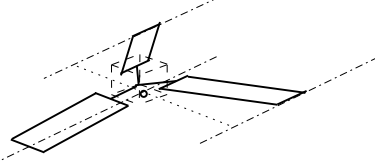
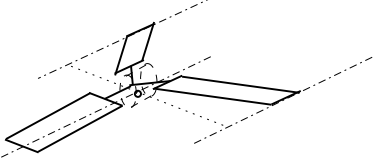
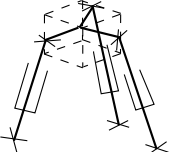
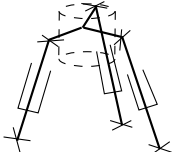
Les performances cinéto-statiques de l'UraneSX (resp. Triaglide) ne dépendent pas de z (resp. x) car l'espace de travail est illimité selon l'axe Z (resp. X). Il suffit donc de calculer le plus grand EDR carré ou circulaire orienté perpendiculairement à l'axe Z (resp. Y) pour déterminer le plus grand EDR cubique ou cylindrique.

Nous n'avons pas recherché la meilleure orientation de l'EDR pour chaque PKM, c'est-à-dire celle qui donne le meilleur indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{V}$. Nous avons choisi l'orientation de l'EDR en évaluant intuitivement que l'encombrement de la PKM serait faible et le volume de l'EDR important par rapport à d'autres orientations possibles de l'EDR.

Que la méthode utilisée soit celle discrétisant le volume de travail ou celle utilisant l'analyse par intervalles, rechercher la meilleure orientation prendrait beaucoup de temps. Mais c'est ce qu'il faudrait faire pour que l'évaluation soit la plus juste possible. Il faudrait ensuite observer les conséquences du choix de l'orientation de l'EDR sur l'encombrement de la machine en calculant l'indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{V}$. C'est ce que nous ferons dans le paragraphe 3.7. L'encombrement est en effet un critère important pour une PKM. Pour modifier l'orientation de l'EDR dans l'espace de travail, il suffit de multiplier la matrice Jacobienne par une matrice de changement de repère.

Pour être parfaitement rigoureux dans le choix de la meilleure PKM selon un indice basé sur l'évaluation du volume de l'EDR \mathcal{W}_{DR} , il faudrait tester toutes les orientations possibles de l'EDR pour tous les aspect \mathcal{A} possibles.

Pour information, voici le résultat du calcul du volume de l'EDR cubique avec la méthode ALIAS pour quelques-unes des PKM évaluées dans ce paragraphe :

	
UraneSX : EDR cubique	UraneSX : EDR cylindrique
	
Y-STAR : EDR cubique	Y-STAR : EDR cylindrique
	
Hybrid-glide : EDR cubique	Hybrid-glide : EDR cylindrique
	
Triaglide : EDR cubique	Triaglide : EDR cylindrique
	
3-UPU : EDR cubique	3-UPU : EDR cylindrique

TAB. 3.7 – Détermination des plus grands EDR cubique et cylindrique des PKM UraneSX, 3-UPU, Y-STAR, Hybridglide, Triaglide

1. Le 3-UPU : $\mathcal{W}_{DR} = 0.063 \text{ m}^3$;
2. Le Y-STAR : $\mathcal{W}_{DR} = 0.077 \text{ m}^3$.

Ces résultats sont assez proches de ceux obtenus avec la méthode discrète, ils sont néanmoins légèrement inférieurs. Comme à priori la méthode ALIAS est plus précise, on peut conclure que la méthode manuelle surévalue le volume de l'EDR. Naturellement, cette erreur est liée à la précision utilisée pour la discrétisation de l'espace Cartésien.

Pour les 6 PKM considérées, c'est le plus grand EDR cylindrique qui donne le meilleur

	EDR cubique					
	Ortho	Urane	Y-STAR	Hybrid	Triaglide	3UPU
L (m)	0.642	0.514	0.438	0.464	0.244	0.417
\mathcal{W}_{DR} (m ³)	0.265	0.136	0.084	0.1	0.0145	0.0723
\mathcal{W} (m ³)	0.571	0.601	0.369	0.224	0.0922	0.405
$\Delta\rho_{maxi}$ (m)	0.822	0.869	0.867	0.887	0.52	0.673
$\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$	0.463	0.226	0.227	0.445	0.157	0.178
	EDR cylindrique					
	Ortho	Urane	Y-STAR	Hybrid	Triaglide	3UPU
L (m)	0.754	0.711	0.457	0.473	0.32	0.503
\mathcal{W}_{DR} (m ³)	0.337	0.282	0.0751	0.0829	0.0261	0.0998
\mathcal{W} (m ³)	0.635	0.816	0.28	0.129	0.14	0.494
$\Delta\rho_{maxi}$ (m)	0.871	1.081	0.741	0.653	0.574	0.708
$\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$	0.53	0.346	0.269	0.643	0.187	0.202

TAB. 3.8 – Évaluation de PKM à translations selon l'indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$ pour les plus grands EDR cubique et cylindrique

indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$ (Fig. 3.38). L'Orthoglide et l'UraneSX possèdent les plus grands EDR.

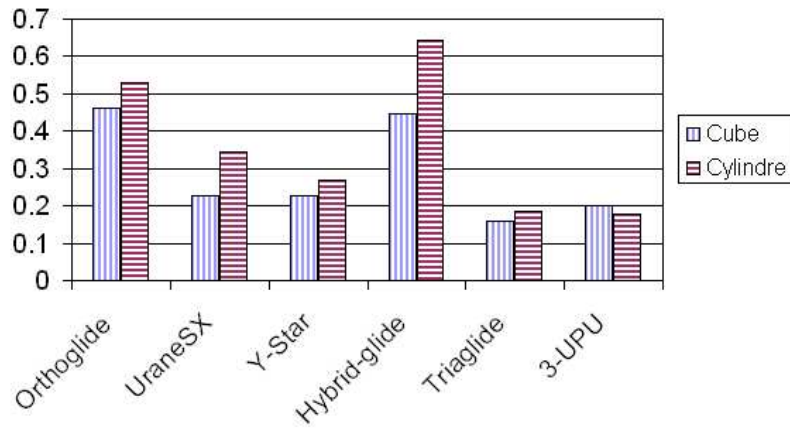


FIG. 3.38 – Comparaison des PKM selon l'indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$

L'indice $(\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W})_{cubique}$ de l'Orthoglide est un peu meilleur que celui de l'Hybrid-glide. Viennent ensuite trois PKM dont l'indice $(\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W})_{cubique}$ est inférieur : l'UraneSX, le 3-UPU, le Y-Star. Ces PKM sont à peu près équivalentes. L'indice $(\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W})_{cubique}$ du Triaglide est le moins bon.

L'indice $(\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W})_{cylindrique}$ de l'Hybrid-glide est le meilleur, l'Orthoglide vient ensuite, puis l'UraneSX, l'Y-Star, et enfin le 3-UPU et le Triaglide qui sont à peu près équivalents.

Selon les caractéristiques choisies pour l'EDR, l'indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$ varie, et le classement des

PKM change également. Le but de cette comparaison n'est pas d'aboutir à un classement définitif, mais de montrer que l'aptitude d'une PKM varie selon la tâche d'usinage à laquelle on la destine.

En effet, la notion d'EDR prend en compte les caractéristiques de la tâche : performances cinétostatiques requises, forme des pièces.

Dans le paragraphe 3.5.3, on a utilisé l'indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$ pour évaluer l'Orthoglide lorsqu'une de ses jambes est plus longue que les deux autres. On pourrait également utiliser l'indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$ pour évaluer des versions alternatives des PKM Hybrid-glide, Triaglide, et chercher cette fois pour quelle valeur de d (l'écartement entre les liaisons actionnées) on obtient le meilleur indice. Dans le cas du 3-UPU, on pourrait rechercher pour quelle valeur du rapport homothétique e entre la plate-forme de base et la plate-forme mobile on obtient le meilleur indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$, et comparer le résultat obtenu à la valeur que nous utilisons et qui a été déterminée dans [Tsai 00] en optimisant l'indice de conditionnement global.

3.5.5 Évaluation d'une PKM à translations à liaisons actionnées rotatives : le robot Delta

Nous allons appliquer la notion d'EDR à une PKM spatiale à translations dont les trois jambes sont munies de parallélogrammes reliés à trois liaisons actionnées rotatives : il s'agit du robot Delta [Clavel 88] (Fig. 3.39).

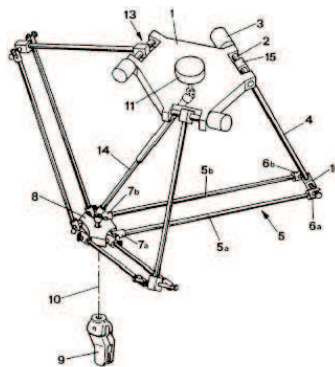


FIG. 3.39 – Le robot Delta

La matrice Jacobienne de ce robot relie les vitesses cartésiennes en m.s^{-1} aux vitesses articulaires en rad.s^{-1} . Les FAV relient donc des rad.s^{-1} à des m.s^{-1} et n'ont pas de signification physique claire comme c'est le cas pour les PKM précédentes.

On peut résoudre ce problème en considérant que les FAV sont les rapports entre les vitesses Cartésiennes et les vitesses instantanées de trois points situés sur les pieds des jambes. On choisit

par exemple les points P_i où sont fixés les parallélogrammes (Fig. 3.40).

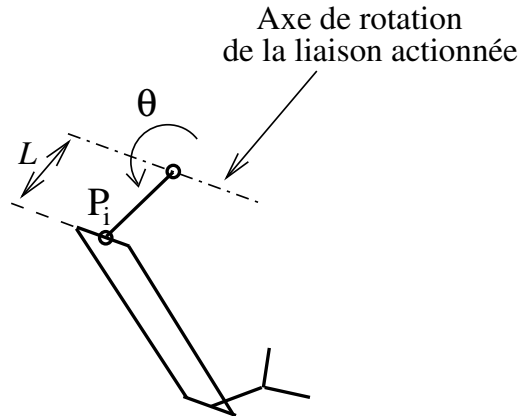


FIG. 3.40 – Point P_i dont on considère la vitesse instantanée

Ainsi, dans l'équation de vitesse $\mathbf{J}\dot{\theta} = \mathbf{t}$ on remplace $\dot{\theta}_i$ par $\dot{\rho}_i/L$, où $\dot{\rho}_i$ est le module de la vitesse instantanée de P_i . Cela revient à remplacer \mathbf{J} par \mathbf{J}/L . On choisit $L = 260/480$, la longueur des barres du parallélogramme valant 1. Ces paramètres géométriques sont tirés de [Pierrot 91]. Ils sont proches de ceux utilisés pour les applications classiques du robot Delta (pick-and-place). Le Delta est un des robots parallèles les plus répandus dans l'industrie [Bonev Web 1], avec par exemple le modèle *Flexpicker* d'ABB Robotics.

Nous avons essayé de déterminer pour ce robot le plus grand EDR cubique ou cylindrique tel que les FAV soient compris entre $1/2$ et 2 . La procédure est la même que pour les PKM précédentes. Mais les paramètres géométriques tirés de [Pierrot 91] ne le permettent pas. Les FAV se trouvent à l'extérieur de l'intervalle $[1/2; 2]$. Si l'on augmentait la valeur de L , il serait possible de diminuer la valeur des FAV tels que nous les avons définis, et donc de déterminer un EDR cubique dans lequel les FAV seraient compris dans l'intervalle $[1/2; 2]$.

Ce robot Delta possède une configuration isotrope en laquelle les FAV valent environ 3.5. En bornant les FAV entre 2.5 et 4.7, on peut déterminer un EDR cubique de côté 0.26 centré sur cette configuration isotrope (Fig. 3.41).

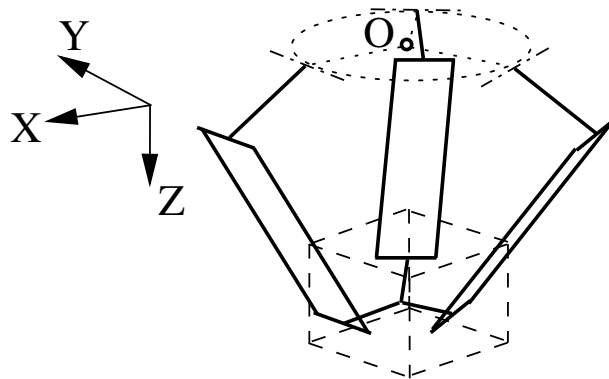


FIG. 3.41 – EDR cubique du robot Delta

3.6 Notion d'EDR prenant en compte la direction de déplacement

3.6.1 Pourquoi prendre en compte la direction de déplacement

Dans le paragraphe 3.5.4.1, on a comparé l'Orthoglide à l'UraneSX selon l'indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$ pour des EDR de formes cubique et cylindrique et des FAV compris entre 1/2 et 2. L'indice est meilleur pour l'Orthoglide, cependant il est difficile de formuler un jugement de valeur sur une machine par rapport à l'autre parce qu'elles ne sont pas destinées aux mêmes tâches d'usinage.

Le problème est que l'on compare deux PKM selon un indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$ qui limite les FAV de façon isotrope, c'est-à-dire que les limites sont indépendantes de la direction de déplacement de l'outil. Or on n'a pas besoin qu'une PKM comme l'UraneSX dédiée au perçage-lamage-taraudage (PLT) possède des performances cinétostatiques limitées de façon isotrope.

Pour que l'UraneSX soit une bonne candidate pour des tâches de type PLT, elle devrait posséder des Facteurs d'Amplification des Efforts (FAE, voir paragraphe 2.1.4) élevés (resp. FAV faibles) selon la direction de perçage pour éviter d'avoir à surdimensionner les moteurs. Les deux autres directions de déplacement servent à positionner l'outil en face du trou à percer. La vitesse de déplacement selon ces directions devrait être élevée pour minimiser le temps de cycle. Il faudrait donc que l'UraneSX possède des FAV élevés selon ces directions pour là encore éviter d'avoir à surdimensionner les moteurs. Or la limitation isotrope des FAV dans l'EDR ne rend pas compte de la directionnalité des performances cinétostatiques. C'est-à-dire que les performances cinétostatiques évaluées en utilisant la notion d'EDR que nous avons employée jusqu'ici sont indépendantes de la direction de déplacement de l'outil dans l'espace Cartésien.

Pour évaluer une PKM comme l'UraneSX destinée à des tâches de type PLT, il faut redéfinir l'EDR en bornant les FAV en fonction de la direction de déplacement de l'outil. Ce nouvel EDR permettra de définir des indices de performance encore mieux adaptés aux différentes tâches d'usinage.

3.6.2 Définition et détermination de l'EDR directionnel

Soit Δ_1 la direction de déplacement selon laquelle une raideur minimum est requise (la direction de perçage par exemple), \mathbf{e}_1 un vecteur unitaire dirigé selon Δ_1 . Soient les vecteurs \mathbf{e}_2 et \mathbf{e}_3 tels que $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ forme une base orthonormée. \mathbf{e}_2 et \mathbf{e}_3 sont associés aux directions Δ_2

et Δ_3 . Voici une définition de l'Espace Dextre Directionnel Régulier, que nous noterons EDDR :

$$\mathcal{W}_{DDR} = \{\mathbf{p} \in \mathcal{W} \mid \psi_1(\mathbf{p}) \leq \psi_{min}, \psi_{max} \leq \psi_i(\mathbf{p}), i = 2, 3 \mid \mathcal{W}_{DDR} \text{ de forme } \mathcal{F}\}$$

ψ_i est le FAV selon la direction de déplacement Δ_i .

On peut aussi définir l'Espace Dextre Directionnel par Aspect, que nous noterons EDDA.

$$\mathcal{W}_{DDA} = \{\mathbf{p} \in \mathcal{W} \mid \psi_1(\mathbf{p}) \leq \psi_{min}, \psi_{max} \leq \psi_i(\mathbf{p}), i = 2, 3\}$$

La procédure de détermination du plus grand EDDR est identique à la procédure de détermination de l'EDR, sauf qu'en chaque point \mathbf{p} de la surface de $\mathcal{V}_{\mathcal{F}}$, il faut évaluer les FAV directionnellement c'est-à-dire vérifier la condition :

$$\psi_1(\mathbf{p}) \leq \psi_{min}, \psi_{max} \leq \psi_i(\mathbf{p}), i = 2, 3$$

Les bornes ψ_{min} et ψ_{max} sont à définir en fonction de la tâche. On pourrait choisir par exemple $\psi_{min} = 1/2$ et $\psi_{max} = 2$ dans le cas de l'UraneSX.

Pour vérifier si un point \mathbf{p} est valide, il faut déterminer l'équation de l'ellipsoïde de manipulabilité en ce point à partir des racines carrées des valeurs propres de $(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)^{-1}$ et des vecteurs propres associés. On note cet ellipsoïde \mathcal{L} . On détermine ensuite une des intersections, notée I , de \mathcal{L} avec la droite (\mathbf{p}, Δ_1) passant par le point \mathbf{p} et dirigée selon Δ_1 .

On calcule ensuite la longueur l_{Ip} du segment $I\mathbf{p}$ qui relie le point \mathbf{p} au point I . l_{Ip} est l'inverse de $\psi_1(\mathbf{p})$:

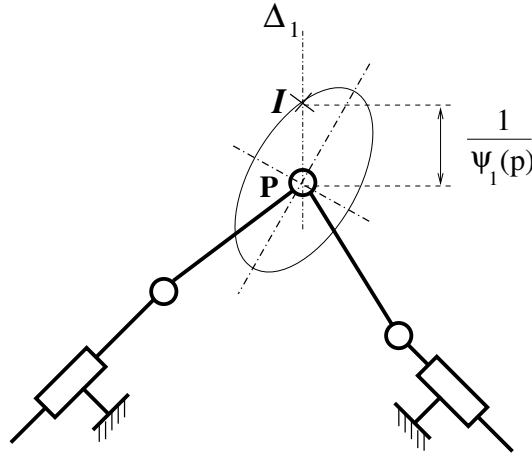
$$\psi_1(\mathbf{p}) = \frac{1}{l_{Ip}}$$

On doit avoir $\psi_1(\mathbf{p}) \leq \psi_{min}$ pour que le point \mathbf{p} soit valide. Sur la Fig. 3.42, on a représenté le segment $I\mathbf{p}$ dans le cas d'une PKM plane que nous avons déjà analysée : le Biglide. La direction Δ_1 est la direction verticale.

Si l'on vérifie $\psi_1(\mathbf{p}) \leq \psi_{min}$, on doit ensuite vérifier que l'on a $\psi_{max} \leq \psi_i(\mathbf{p}), i = 2, 3$ pour que le point \mathbf{p} soit valide. Pour vérifier cette condition, on intersecte \mathcal{L} avec le plan Π passant par \mathbf{p} et orthogonal à la direction Δ_1 . Le plan Π contient les directions Δ_2 et Δ_3 :

$$\Pi \equiv (\mathbf{p}, (\mathbf{p}, \Delta_2), (\mathbf{p}, \Delta_3))$$

L'intersection de \mathcal{L} avec Π est une ellipse dont l'inverse de la demi-longueur du grand axe $1/l_{Grand\text{ axe}}$ et l'inverse de la demi-longueur du petit axe $1/l_{Petit\text{ axe}}$ doivent être supérieures à ψ_{max} pour que \mathbf{p} soit valide et appartienne à l'EDDR.

FIG. 3.42 – Détermination de $\psi_1(\mathbf{p})$

Seule l'inverse de la longueur du grand axe est à vérifier car on a $1/l_{Grand\ axe} \leq 1/l_{Petit\ axe}$, donc si $1/l_{Grand\ axe} \geq \psi_{max}$, alors $1/l_{Petit\ axe} \geq \psi_{max}$.

Si $1/l_{Grand\ axe} \geq \psi_{max}$, alors pour un déplacement de l'outil dans le plan Π selon une direction quelconque, les FAV seront supérieurs à ψ_{max} . C'est la deuxième condition que le point \mathbf{p} doit respecter pour appartenir à l'EDDR.

3.6.3 Détermination de la validité d'un point de l'EDR directionnel

Nous allons maintenant détailler la procédure à suivre pour déterminer la validité d'un point \mathbf{p} de coordonnées $(x_{\mathbf{p}}, y_{\mathbf{p}}, z_{\mathbf{p}})$ dans le cas d'une PKM à translations spatiale. Nous allons présenter cette procédure sous forme d'algorithme. Sans perte de généralité, on peut supposer que la direction Δ_1 (resp. Δ_2 , resp. resp. Δ_3) est parallèle au vecteur \mathbf{x} (resp. \mathbf{y} , resp. resp. \mathbf{z}). En chaque point \mathbf{p} , on travaillera dans le repère local $R = (\mathbf{p}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$.

Algorithme

1. En \mathbf{p} , on calcule les valeurs propres σ_i de $(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)^{-1}$ et les vecteurs propres associés $\mathbf{e}_i = (x_i, y_i, z_i)$ pour $i = 1, 2, 3$. Les racines carrées des σ_i sont les demi-longueurs des axes principaux de \mathcal{L} .
2. L'équation de l'ellipsoïde \mathcal{L} dans le repère formé des vecteurs propres de \mathbf{J} , repère noté $R' = (\mathbf{p}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, est donc :

$$\frac{x'^2}{\sigma_1} + \frac{y'^2}{\sigma_2} + \frac{z'^2}{\sigma_3} = 1 \quad (3.6)$$

3. Pour calculer la longueur du segment $I\mathbf{p}$, il faut écrire l'Eq. (3.6) dans le repère R . Pour cela, on procède à un changement de variable de R' à R . Soit un point M de \mathcal{L} de

coordonnées (x', y', z') dans le repère R' , M a pour coordonnées (x, y, z) dans le repère R et on a la relation suivante entre (x', y', z') et (x, y, z) :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^T \\ \mathbf{e}_2^T \\ \mathbf{e}_3^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Dans l'Eq. (3.6), on peut donc remplacer x' , y' et z' par leur expression en fonction de x , y et z . L'Eq. (3.6) devient une quadrique de la forme :

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz - 1 = 0 \quad (a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R} \quad (3.7)$$

Les coefficients réels (a, b, c, d, e, f) sont fonction des valeurs propres σ_i de $(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)^{-1}$ et des coordonnées des \mathbf{e}_i .

4. On peut maintenant calculer la longueur du segment $I\mathbf{p}$. I est un des deux points d'intersection de \mathcal{L} avec la droite (\mathbf{p}, Δ_1) : $I = \mathcal{L} \cap (\mathbf{p}, \Delta_1)$. Les coordonnées (x_I, y_I, z_I) de I vérifient :

$$\begin{cases} I \in (\mathbf{p}, \Delta_1) & \Rightarrow y_I = z_I = 0 \\ I \in \mathcal{L} & \Rightarrow ax_I^2 + by_I^2 + cz_I^2 + dx_Iy_I + ex_Iz_I + fy_Iz_I - 1 = 0 \end{cases}$$

La combinaison de ces deux conditions donne :

$$ax_I^2 - 1 = 0$$

On choisit $I\mathbf{p} = x_I$ et $x_I \geq 0$. On obtient :

$$x_I = \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{\sigma_1} + \frac{x_2^2}{\sigma_2} + \frac{x_3^2}{\sigma_3}}}$$

Où les x_i , $i = 1, 2, 3$ sont les coordonnées selon la direction Δ_1 des vecteurs propres \mathbf{e}_i de $(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)^{-1}$.

On obtient donc :

$$\psi_1(\mathbf{p}) = \frac{1}{x_I} = \sqrt{\frac{x_1^2}{\sigma_1} + \frac{x_2^2}{\sigma_2} + \frac{x_3^2}{\sigma_3}}$$

On vérifie que $\psi_1(\mathbf{p}) \geq \psi_{min}$, et si ce n'est pas le cas alors le point \mathbf{p} n'est pas valide et ne fait pas partie de l'EDDR.

5. Si $\psi_1(\mathbf{p}) \leq \psi_{min}$, alors pour que \mathbf{p} soit valide il faut vérifier que l'on a $\psi_{max} \leq \psi_i(\mathbf{p})$ pour $i = 2, 3$. C'est-à-dire qu'il faut vérifier que l'inverse de la demi-longueur du grand axe de la projection de \mathcal{L} dans Π est supérieure à ψ_{max} . L'intersection de \mathcal{L} avec le plan Π est une ellipse notée \mathcal{L}_Π . Les points de Π sont tels que $x = 0$ dans le repère local $R = (\mathbf{p}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$. Donc pour obtenir l'équation de \mathcal{L}_Π , il suffit de remplacer x par 0 dans l'Eq. (3.7), ce qui donne :

$$by^2 + cz^2 + fyz - 1 = 0 \quad (3.8)$$

avec

$$\begin{aligned} b &= \frac{y_1^2}{\sigma_1} + \frac{y_2^2}{\sigma_2} + \frac{y_3^2}{\sigma_3} \\ c &= \frac{z_1^2}{\sigma_1} + \frac{z_2^2}{\sigma_2} + \frac{z_3^2}{\sigma_3} \\ f &= \frac{2y_1z_1}{\sigma_1} + \frac{2y_2z_2}{\sigma_2} + \frac{2y_3z_3}{\sigma_3} \end{aligned}$$

L'Eq. (3.8) est une forme quadratique dont la forme bilinéaire associée est la matrice \mathbf{M} telle que

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} b & f \\ f & b \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de \mathbf{M} sont les demi-longueurs des axes principaux de \mathcal{L}_Π . Si l'inverse de la plus grande de ces valeurs propres est supérieure à ψ_{max} , alors on est certain d'avoir $\psi_{max} \leq \psi_i(\mathbf{p})$ pour $i = 2, 3$, et donc le point \mathbf{p} est considéré comme valide.

Cet algorithme peut s'intégrer facilement dans la méthode de détermination de l'EDR basée sur la discrétisation de \mathcal{W} : en chaque point de la surface de $\mathcal{V}_\mathcal{F}$, au lieu de calculer les FAV, on applique la procédure décrite ci-dessus.

3.7 Nouveaux indices de performances basés sur la notion d'EDR

Dans le paragraphe 2.4, nous avons présenté un état de l'art des indices de performances utilisés en conception de PKM. Puis dans ce chapitre, nous avons défini une nouvelle notion : l'Espace Dextre Régulier. Cette notion nous a permis d'utiliser un nouvel indice de performance, le ratio $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$, pour évaluer différentes conceptions géométriques d'une même PKM, ou pour comparer entre elles des PKM destinées à des tâches d'usinage de même nature.

Dans ce paragraphe, nous proposons dans le Tab. 3.9 d'autres indices de performance basés sur les notions d'EDR et d'EDA. Cela permet d'enrichir la palette d'indices utilisables par un concepteur pour, en fonction de la tâche d'usinage, évaluer une PKM et optimiser sa géométrie, ou encore choisir l'architecture d'une PKM. Pour chaque nouvel indice, on indique dans le Tab. 3.9 quelles sont les caractéristiques qui sont prises en compte : forme de l'espace de travail, encombrement de la machine, variation des FAV (ou d'un autre indice cinétostatique). Naturellement, \mathcal{W}_{DR} (resp. \mathcal{W}_{DA}) peut être remplacé par \mathcal{W}_{DDR} (resp. \mathcal{W}_{DDA}) si l'on souhaite évaluer les FAV directionnellement.

Ces nouveaux indices permettent d'évaluer les caractéristiques d'une PKM en intégrant des contraintes différentes selon le besoin du concepteur, lié à la tâche à laquelle il destine

Indice	Prend en compte	Ne prend pas en compte
Volume de \mathcal{W}_{DR}	Variation des FAV	Régularité géométrique de \mathcal{W} , encombrement
$\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$	Régularité géométrique de \mathcal{W} , variation des FAV	encombrement
Volume de \mathcal{W}_{DA}	Variation des FAV	Régularité géométrique de \mathcal{W} , encombrement
$\mathcal{W}_{DA}/\mathcal{W}$	Variation des FAV	Régularité géométrique de \mathcal{W} , encombrement
$\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}_{DA}$	Variation des FAV	Régularité géométrique de \mathcal{W} , encombrement
$\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{V}$	Variation des FAV, encombrement	Régularité géométrique de \mathcal{W}
$\mathcal{W}_{DA}/\mathcal{V}$	Variation des FAV, encombrement	Régularité géométrique de \mathcal{W}

TAB. 3.9 – Nouveaux indices basés sur la notion d’EDR

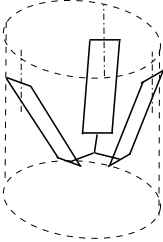
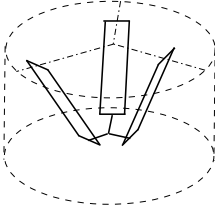
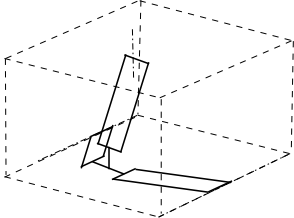
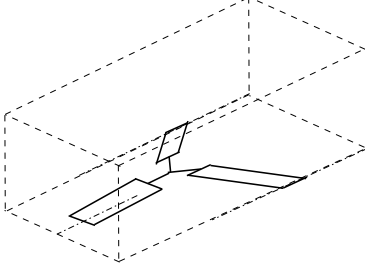
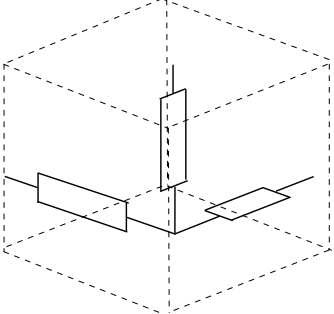
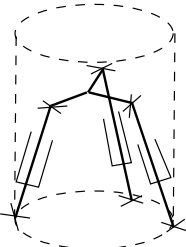
la machine : la notion d’EDR est plus contraignante que la notion d’EDA par exemple, en contrepartie l’EDR est une zone de travail de qualité supérieure car sa forme est régulière. Pour choisir l’indice à utiliser, le concepteur doit déterminer les caractéristiques qu’il souhaite que la PKM possède prioritairement : souhaite-t’il seulement que les performances cinétostatiques de la PKM soient limitées, souhaite-t’il également que la forme de l’espace de travail soit régulière étant donnée la forme des pièces à usiner ?

Dans le paragraphe 3.5.4, nous avons utilisé l’indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$ pour comparer entre elles les PKM Orthoglide, UraneSX, 3-UPU, Y-STAR, Hybrid-glide et Triaglide. Une autre caractéristique des PKM très importante pour le concepteur est leur encombrement, que l’on caractérise avec le volume \mathcal{V} , volume enveloppe qui englobe l’espace de travail et les courses articulaires. Lorsque l’EDR est déterminé, les courses articulaires le sont aussi et par conséquent le volume de travail. Pour prendre en compte l’encombrement et illustrer l’intérêt de disposer d’indices de performance variés basés sur la notion d’EDR, nous allons classer les PKM analysées dans le paragraphe 3.5.4 en utilisant l’indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{V}$, et comparer le classement obtenu en utilisant l’indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$.

Remarque : L’indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{V}$ est intéressant pour comparer une PKM à une machine-outil sérielle car un inconvénient des PKM est leur faible ratio \mathcal{W}/\mathcal{V} par rapport aux machines sérielles (voir paragraphe 2.2.4.4). L’indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{V}$ permet d’évaluer ce ratio tout en prenant en compte l’homogénéité des performances cinétostatiques.

Pour définir la forme du volume enveloppe de chaque PKM, nous avons fait un choix qui

nous semble réaliste par rapport à l’encombrement qu’aurait la machine une fois implantée dans une usine, munie de ses moteurs et de ses carters de protection. Nous avons choisi un cylindre enveloppe pour les UraneSX, 3-UPU, Y-STAR, et un parallélépipède rectangle enveloppe pour les Orthoglide, Hybrid-glide et Triaglide (Tab. 3.10).

	
UraneSX	Y-Star
	
Hybrid-glide	Triaglide
	
Orthoglide	3-UPU

TAB. 3.10 – Volumes enveloppes des PKM UraneSX, 3-UPU, Y-STAR, Hybridglide, Triaglide, Orthoglide

Ces volumes ne sont pas forcément optimaux, c’est-à-dire qu’on pourrait trouver des formes enveloppes régulières (prisme, tétraèdre) ayant un volume plus faible, notamment pour l’Orthoglide et l’Hybrid-glide. Néanmoins nous pensons que le choix de la forme enveloppe doit être réaliste vis-à-vis du volume qui sera réellement occupé par la machine. Ce choix est par exemple justifié dans le cas du prototype de l’Orthoglide dont le volume effectivement occupé est proche de celui d’un parallélépipède (Fig. 3.43).

Une utilisation possible des nouveaux indices du Tab. 3.9 est la suivante : à partir de deux indices \mathcal{I}_1 et \mathcal{I}_2 que l’on affecte de coefficients de pondération p_1 et p_2 (coefficients positifs) tels



FIG. 3.43 – Photo du prototype de l'Orthoglide

que $p_1 + p_2 = 1$, on peut définir un indice mixte \mathcal{I}_{mix} tel que :

$$\mathcal{I}_{mix} = p_1 \mathcal{I}_1 + p_2 \mathcal{I}_2$$

Ceci permet, en évaluant un seul indice, de prendre en compte plusieurs caractéristiques (volume de l'EDR par rapport au volume de travail, encombrement) pour la comparaison de PKM, tout en hiérarchisant ces caractéristiques grâce aux coefficients de pondération p_1 et p_2 . Le choix de p_1 et p_2 dépend des besoins du concepteur. Il est également possible de définir un indice mixte composé de 3 ou 4 indices différents. L'utilisation mixte de plusieurs indices pour en former un seul afin d'optimiser une PKM est utilisée dans [Tremblay 99] et dans [Stock 03] (voir paragraphe 2.3.3). Ici, nous utilisons cette idée pour évaluer et comparer entre elles des PKM.

Il faut néanmoins faire attention : la plupart du temps on souhaite avant tout que les indices de performance dans l'espace de travail aient une valeur minimale. Si on fixe une borne minimale pour \mathcal{I}_1 et \mathcal{I}_2 , et si l'on mène ensuite une procédure d'optimisation en fonction de \mathcal{I}_{mix} , on aboutit à un problème d'optimisation sous contrainte qui est assez compliqué à traiter avec les méthodes numériques classiques.

Nous allons définir un indice mixte composé de deux indices, avec lequel nous allons comparer les 6 PKM. L'indice \mathcal{I}_{mix} est la moyenne des indices $\mathcal{I}_1 = \mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$ et $\mathcal{I}_2 = \mathcal{W}_{DR}/\mathcal{V}$. On a donc $p_1 = p_2$ (on choisit $p_i = 0.5$ dans notre cas). Il est possible que \mathcal{I}_1 et \mathcal{I}_2 n'aient pas le même ordre de grandeur, donc pour comparer des PKM, cela n'aurait pas de sens d'additionner $p_1 \mathcal{I}_1$ et $p_2 \mathcal{I}_2$. Nous choisissons donc d'exprimer \mathcal{I}_1 et \mathcal{I}_2 en %. Le problème est de choisir la valeur de \mathcal{I}_1 ou \mathcal{I}_2 qui correspond au pourcentage 100%. Dans le cas de la comparaison des PKM, une idée est de diviser \mathcal{I}_1 (resp. \mathcal{I}_2) par la valeur maximum $\mathcal{I}_{1_{maxi}}$ (resp. $\mathcal{I}_{2_{maxi}}$) obtenue par la meilleure des 6 PKM considérées. Ce choix est possible parce que nous comparons des PKM entre elles. S'il s'agissait d'évaluer des conceptions alternatives d'une même PKM, il faudrait

tout d'abord définir quelle est la meilleure des alternatives vis-à-vis des indices \mathcal{I}_1 et \mathcal{I}_2 , pour pouvoir définir la valeur maximum $\mathcal{I}_{1_{maxi}}$ ou $\mathcal{I}_{2_{maxi}}$ qui correspond au pourcentage 100%.

L'indice \mathcal{I}_{mix} exprimé en % vaut :

$$\mathcal{I}_{mix}(\%) = 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\mathcal{I}_1}{\mathcal{I}_{1_{maxi}}} + \frac{\mathcal{I}_2}{\mathcal{I}_{2_{maxi}}} \right)$$

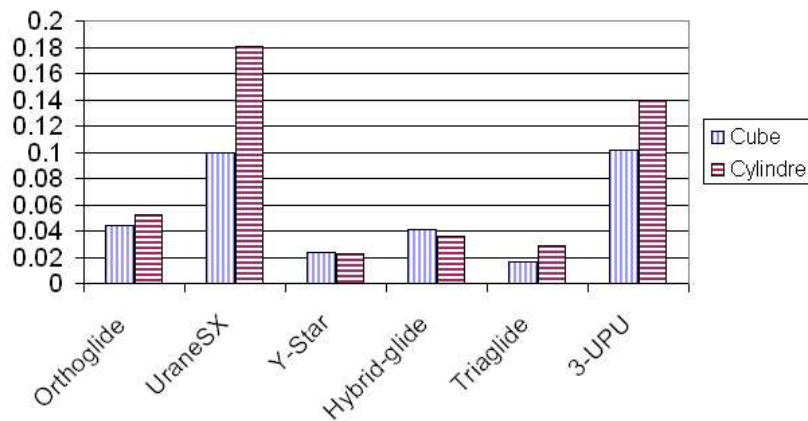
Les différents indices de performance calculés ($\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$, $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{V}$, \mathcal{I}_{mix}) sont rassemblés dans le Tab. 3.11. On a aussi calculé la moyenne des FAV dans l'EDR afin d'illustrer le fait que dans l'EDR, la moyenne des FAV est proche de la moyenne des bornes limitant les FAV.

	EDR cubique					
	Ortho	Urane	Y-STAR	Hybrid	Triaglide	3UPU
\mathcal{W}_{DR} (m ³)	0.265	0.136	0.084	0.0996	0.0145	0.0723
\mathcal{V} (m ³)	6.053	1.374	3.523	2.407	0.88	0.709
$\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$	0.463	0.226	0.227	0.445	0.157	0.178
$\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{V}$	0.0438	0.099	0.024	0.0414	0.0165	0.102
\mathcal{I}_{mix} (%)	71	73	36	68	25	69
Moyenne FAV	1.02	1.01	1.16	1.26	1.21	1.12
	EDR cylindrique					
	Ortho	Urane	Y-STAR	Hybrid	Triaglide	3UPU
\mathcal{W}_{DR} (m ³)	0.337	0.282	0.0751	0.0829	0.0261	0.0998
\mathcal{V} (m ³)	6.45	1.556	3.269	2.318	0.911	0.717
$\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$	0.53	0.346	0.269	0.643	0.187	0.202
$\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{V}$	0.0522	0.181	0.023	0.0358	0.0286	0.139
\mathcal{I}_{mix} (%)	56	77	27	60	22	54
Moyenne FAV	1.08	1.06	1.22	1.3	1.2	1.17

TAB. 3.11 – Évaluation de l'Orthoglide, de l'UraneSX, du Y-STAR, de l'Hybrid-glide, du Triaglide et du 3-UPU selon différents indices basés sur l'EDR

On peut remarquer que la moyenne des FAV dans \mathcal{W}_{DR} est proche de 1, surtout pour l'Orthoglide et l'UraneSX. Nous constatons pour la deuxième fois (voir paragraphe 3.4.3) que la notion d'EDR englobe l'indice “moyenne des FAV”, ce qui est un argument favorable à la notion d'EDR.

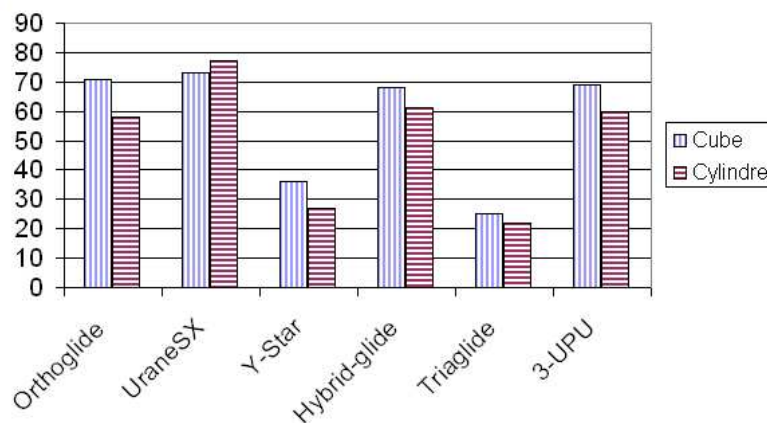
Sur la Fig. 3.44 se trouve l'histogramme représentant l'indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{V}$ de chaque PKM, pour un EDR cubique ou cylindrique. $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{V}$ est en général meilleur lorsque l'EDR est cylindrique, sauf pour le Y-Star et l'Hybrid-glide. Les PKM UraneSX et 3-UPU sont les mieux évaluées : l'UraneSX est de loin la mieux évaluée pour l'EDR cylindrique, le 3-UPU est seulement légèrement supérieur à l'UraneSX pour l'EDR cubique.

FIG. 3.44 – Comparaison selon l'indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{V}$

L'indice mixte \mathcal{I}_{mix} fait la moyenne des indices $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$ et $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{V}$, les résultats sont représentés sous forme d'histogramme sur la Fig. 3.45. Ce graphique fait ressortir les meilleures PKM vis-à-vis de \mathcal{I}_{mix} , pour les EDR cubique et cylindrique.

Pour l'EDR cubique, l'UraneSX domine ($\mathcal{I}_{mix} = 73\%$), mais se trouve presque ex-aequo avec l'Orthoglide (71%), le 3-UPU (69%) et l'Hybrid-glide (68%). Avec un indice \mathcal{I}_{mix} bien plus faible viennent ensuite l'Y-Star (36%) et le Triaglide (25%).

Pour l'EDR cylindrique, l'UraneSX domine également, mais d'assez loin. Avec un \mathcal{I}_{mix} de 77%, elle dépasse l'Hybrid-glide de 17%, l'Orthoglide de 21% et le 3-UPU de 23%. Viennent ensuite l'Y-Star ($\mathcal{I}_{mix} = 27\%$) et le Triaglide ($\mathcal{I}_{mix} = 22\%$).

FIG. 3.45 – Comparaison selon l'indice mixte \mathcal{I}_{mix}

Ces résultats montrent les possibilités offertes par la notion d'EDR pour comparer entre elles des PKM en fonction de la tâche. Faire un classement des PKM permet au concepteur de choisir l'architecture la mieux adaptée. La moyenne des FAV dans l'EDR semble en général proche de la moyenne des bornes imposées, ce qui permet en quelque sorte de *prescrire* la moyenne des performances cinéostatiques dans l'EDR.

3.8 Résultats intermédiaires

Des résultats intermédiaires très intéressants sont présentés en Annexe A. Ils ne sont pas liés directement aux contributions présentées dans ce chapitre ce qui explique leur mise à l'écart. Mais ils s'y rapportent, car ils traitent de l'occurrence de configurations isotropes pour certaines des PKM à translations étudiées dans ce chapitre. Nous invitons le lecteur à consulter cette annexe après la conclusion de ce troisième chapitre.

3.9 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre notre contribution à l'évaluation des performances cinéostatiques des PKM à translations à partir de la notion d'Espace Dextre Régulier (EDR).

Tout d'abord, le processus d'optimisation topologique de l'Orthoglide a été présenté. Les améliorations apportées à la topologie des jambes évitent des singularités internes à l'isotropie. On montre que la singularité de type "parallélogramme aplati" engendre des efforts infinis dans les barres du parallélogramme ce qui n'est pas réaliste et explique que cette configuration est instable car l'équilibre statique est impossible. L'Orthoglide, ses caractéristiques cinématiques ainsi que la méthode employée dans [Chablat 03] pour optimiser sa géométrie ont servi de base aux concepts proposés par la suite dans ce chapitre.

L'EDR est un sous-volume de l'espace de travail. Ce sous-volume est appelé Espace de travail Dextre Régulier parce que sa forme est régulière (cube, cylindre). À l'intérieur de l'EDR, un indice cinéostatique est borné. Le choix des bornes sur cet indice, le choix de la forme et de l'orientation de l'EDR sont reliés aux caractéristiques que l'on cherche à évaluer et qui dépendent de la tâche d'usinage.

Deux méthodes de calcul de l'EDR ont été présentées. La première, basée sur la discrétisation de l'espace de travail, est intuitive mais ne permet pas de garantir formellement le résultat, ni de connaître l'erreur faite sur le volume calculé. Le temps de calcul est en moyenne de 20 minutes. La deuxième méthode, basée sur l'analyse par intervalles, garantit numériquement le résultat et permet de connaître l'erreur faite sur le calcul du volume. Mais le temps de calcul peut varier dans des proportions importantes (de quelques secondes à plusieurs dizaines d'heures) en fonction des conditions initiales et il n'est pas possible de prédire à l'avance le temps de calcul.

Afin d'illustrer l'influence de la forme et de l'orientation de l'EDR sur l'indice de performance $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$, une PKM plane à deux DDL en translation a été étudiée, pour illustrer à partir d'un exemple simple ce qu'est l'EDR et quels problèmes peut poser sa détermination, lorsque les

butées articulaires sont définies ou non.

La notion d'EDR a été utilisée afin d'évaluer l'Orthoglide selon l'indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$ pour différentes formes et orientations de l'EDR. Nous avons mis en évidence le fait que l'EDR cylindrique “vertical” donne le meilleur ratio $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$.

Des versions alternatives de l'Orthoglide ont été évaluées : nous avons fait varier la longueur des barres du parallélogramme de la jambe verticale, et avons observé l'évolution de l'indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$. Lorsque la longueur des barres est multipliée par 3, l'indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$ augmente.

L'indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$ a été appliqué à d'autres PKM spatiales de la même famille que l'Orthoglide : les PKM UraneSX, 3-UPU, Y-STAR, Hybrid-glide, Triaglide. Nous avons abouti à un classement de ces PKM, ce qui est intéressant pour le concepteur qui veut choisir une architecture. Nous avons montré comment déterminer l'EDR pour une PKM à translations de type Delta munie de liaisons actionnées rotatives.

Nous avons montré comment évaluer directionnellement les FAV dans l'EDR pour définir plus précisément l'EDR en fonction du besoin lié à la tâche d'usinage.

Nous avons proposé d'autres indices de performance basés sur la notion d'EDR, que nous avons utilisés pour évaluer les PKM de la famille de l'Orthoglide. Notre but n'était pas d'aboutir à un classement absolu, mais d'illustrer l'intérêt de la notion d'EDR pour évaluer les performances en fonction de l'utilisation.

En effet, la notion d'EDR et les méthodes de calcul proposées peuvent s'utiliser telles quelles pour n'importe quelle PKM à translations munie de liaisons actionnées prismatiques : PKM de type Delta linéaire (Orthoglide, UraneSX, Y-STAR, Hybrid-glide, Triaglide), de type tripode (3-UPU assemblé pour la translation, Tricept [Siciliano 99]). Elles peuvent donc être appliquées à des PKM hybrides composées d'un mécanisme à translations muni de liaisons actionnées prismatiques, sur lequel est monté un poignet sériel à 1, 2 ou 3 degrés de liberté en rotation.

Il est possible d'utiliser la notion d'EDR pour l'évaluation de PKM à translations munies de liaisons actionnées rotatives (voir paragraphe 3.5.5). Dans ce cas, on considère la vitesse linéaire d'un point de la liaison actionnée au lieu de la vitesse de rotation de la liaison actionnée.

Dans le cas de PKM spatiales à 3 translations et 1, 2 ou 3 degrés de liberté en rotation, il n'est pas possible d'appliquer telle quelle la méthode proposée. Le problème est que la Jacobienne n'est pas homogène. Il faudrait homogénéiser (i), d'une part les vitesses des liaisons actionnées rotatives (voir paragraphe 3.5.5) si la PKM considérée en possède (ii), d'autres part les vitesses de rotation de la plate-forme mobile, en les remplaçant par exemple par les vitesses linéaires de points de la plate-forme. Néanmoins, les FAV ainsi définis ne sont pas représentatifs des vitesses

de tous les points de la plate-forme.

L'évaluation de PKM en utilisant des indices de performance basés sur les performances cinétostatiques peut servir à évaluer la rigidité statique en considérant que seules les liaisons actionnées sont flexibles [Gosselin 90]. Dans le cas où la machine n'est pas une hexapode, par exemple dans le cas de PKM à translations munies de parallélogrammes, les membrures des jambes sont soumises à de la flexion et ce modèle classique de rigidité est moins pertinent. Dans le chapitre suivant, on va donc mener une étude de rigidité de l'Orthoglide prenant en compte la flexibilité des membrures. Les plus critiques pour la rigidité seront mises en évidence.

Chapitre 4

Analyse paramétrique de la rigidité de l'Orthoglide

Dans ce chapitre, on présente l'analyse paramétrique de la rigidité statique de l'Orthoglide. Une modélisation flexible de l'Orthoglide est proposée. Une méthode existante est utilisée pour le calcul de sa matrice de compliance sous forme symbolique, en fonction des paramètres géométriques et des coordonnées Cartésiennes. Ceci permet d'étudier l'influence des paramètres géométriques sur les termes de la matrice de compliance afin de hiérarchiser les paramètres critiques pour la rigidité. Des effets intéressants de certains paramètres sont mis en évidence. Une autre utilisation de la matrice de compliance sous forme symbolique est le calcul des déplacements compliants pour une tâche d'usinage 3 axes et la recherche d'une zone de l'espace de travail dans laquelle l'erreur de poursuite est la plus faible.

4.1 Introduction

4.1.1 Choix de la méthode de rigidité

Pour expliquer les raisons du choix de la méthode de rigidité utilisée dans ce chapitre, nous allons rappeler les points importants du paragraphe 2.5.4, dans lequel on présente un état de l’art des modèles prenant en compte la déformation des membrures des PKM.

Les hypothèses du modèle de rigidité cinématique de [Gosselin 90] ne sont pas valables pour des PKM dont les jambes encaissent des couples, comme l’Orthoglide. Elles sont valables pour des PKM dont les jambes sont seulement soumises à de la traction-compression, comme par exemple les hexapodes. Dans le cas de l’Orthoglide, il faut prendre en compte la flexibilité de toutes les membrures si l’on veut étudier la rigidité de façon réaliste.

Une méthode pour calculer la matrice de raideur des PKM est proposée dans [Gosselin 02]. Cette méthode est basée sur un modèle linéaire classique qui remplace chaque membrure réelle par une membrure rigide et une liaison élastique virtuelle localisée. Nous allons l’appliquer à l’Orthoglide, afin d’étudier l’influence des paramètres géométriques sur la rigidité. La raison principale du choix de cette méthode est qu’elle peut être facilement appliquée à des PKM de différentes familles, et qu’il est assez facile de rajouter ou d’enlever des liaisons élastiques virtuelles pour tester différents modèles.

Bien qu’adaptée à des PKM de type Delta linéaire comme l’Orthoglide, la méthode présentée dans [Huang 02] manque en effet de généralité et de modularité par rapport à la méthode proposée dans [Gosselin 02]. Or notre objectif est de proposer des outils génériques pour la conception préliminaire de PKM. C’est, entre autres raisons plus circonstanciées, ce qui explique notre choix. Par contre, [Gosselin 02] ne fonctionne pas pour un Orthoglide hyperstatique semblable au prototype construit. Nous étudierons donc un Orthoglide isostatique. À priori, cela ne remet pas en cause les résultats que nous obtiendrons, à savoir la mise en évidence des paramètres critiques pour la rigidité.

L’influence de l’hyperstatisme sur la rigidité de l’Orthoglide pourrait être analysée rigoureusement en utilisant la méthode présentée dans [Huang 02] pour modéliser un Orthoglide flexible hyperstatique. En effet, cette méthode permet de modéliser une PKM hyperstatique de type Delta linéaire. Cela pourrait être une extension possible de ce chapitre.

4.1.2 Continuité de la démarche d'analyse des PKM à translations

Un des objectifs du chapitre 3 était de définir l'EDR, une zone cinétostatique saine pour les tâches d'usinage. Une fois l'EDR choisi, il est alors intéressant d'affiner l'analyse du comportement cinétostatique de la PKM pour améliorer ses performances dans l'EDR. Dans le cas des PKM à translations dont les membrures encaissent des couples, comme l'Orthoglide, l'influence de la flexibilité des membrures sur la rigidité est liée à leur géométrie. Dans ce chapitre nous proposons donc de calculer l'expression symbolique de la matrice de compliance de l'Orthoglide afin d'observer l'influence des variations des paramètres géométriques sur la rigidité. La matrice de raideur n'est en effet pas toujours calculable sous forme symbolique à cause du volume des calculs nécessaire. Nous reviendrons sur ce point. Les informations obtenues sont utiles pour optimiser la géométrie des membrures afin d'accroître la rigidité pour gagner en précision. C'est le deuxième niveau de l'analyse cinétostatique des PKM à translations, une fois que l'EDR a été défini et choisi. Une autre utilisation de l'expression symbolique de la matrice de compliance sera le calcul des déplacements de l'outil sous l'action d'efforts de coupe simulés.

4.2 Modélisation flexible de l'Orthoglide

4.2.1 Paramétrage

Les paramètres utilisés pour la modélisation flexible de l'Orthoglide sont présentés sur la Fig. 4.1 et dans le Tab. 4.1. Ces paramètres correspondent à une modélisation de type poutre des membrures de la jambe.

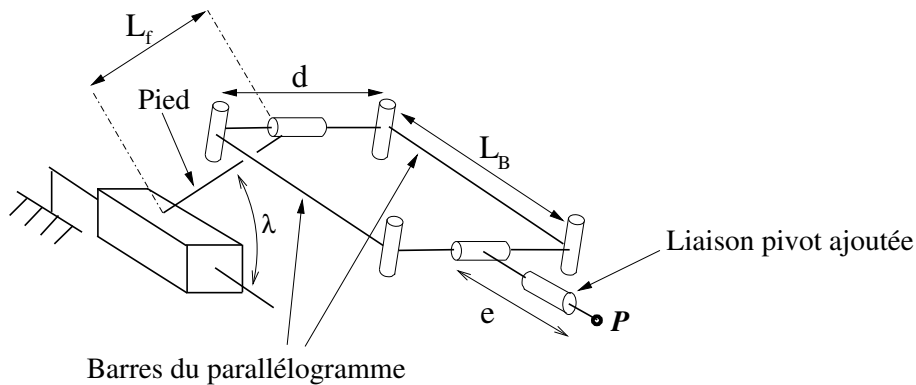


FIG. 4.1 – Paramètres géométriques de la jambe

On utilisera également des paramètres liés au matériau : le module d'Young E , le coefficient de Poisson ν et le module de Coulomb $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$.

Paramètre	Description
L_f	Longueur du pied, voir Fig.4.1
h_f, b_f	Dimensions de la section du pied
$I_{f1} = b_f \cdot h_f^3 / 12$	Moment quadratique de la section du pied 1
$I_{f2} = h_f \cdot b_f^3 / 12$	Moment quadratique de la section du pied 2
$I_{fO} = h_f \cdot b_f (h_f^2 + b_f^2) / 12$	Moment quadratique polaire de la section du pied
d	Distance entre les barres du parallélogramme, voir Fig.4.1
λ	Angle entre l'axe du pied et l'axe de la liaison prismatique, voir Fig.4.1
L_B	Longueur des barres du parallélogramme, voir Fig.4.1
S_B	Surface de la section droite des barres du parallélogramme
e	Voir Fig. 4.1

TAB. 4.1 – Paramètres géométriques utilisés pour la modélisation flexible de l'Orthoglide

4.2.2 Localisation des liaisons élastiques virtuelles

Dans [Zhang 00], les membrures sont considérées comme des poutres flexibles et sont remplacées par des poutres rigides montées sur des liaisons élastiques virtuelles de type pivot (Fig. 4.2).

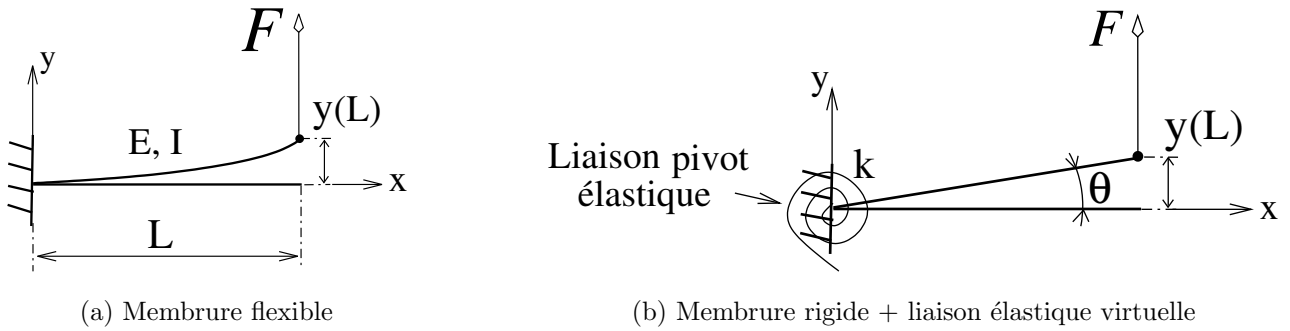


FIG. 4.2 – Modèle général d'une membrure flexible

Sur la Fig. 4.2, en exprimant la relation entre la force F et la déformation $y(x)$, la raideur locale en torsion de la liaison élastique virtuelle peut être calculée. On intègre tout d'abord la relation entre la dérivée seconde de la flèche $y(x)$ et le moment de flexion et on calcule la flèche en $x = L$:

$$\begin{aligned}
 EIy''(x) &= F(L - x) \\
 &\vdots \\
 EIy(L) &= FL^3/3
 \end{aligned}$$

À partir de là, on exprime l'angle de rotation θ de la liaison élastique virtuelle et on en déduit sa raideur k :

$$\theta \simeq y(L)/L = FL^2/3EI$$

$$\rightarrow k = FL/\theta$$

$$k = 3EI/L$$

Si les moteurs des liaisons actionnées sont bloqués, alors une jambe peut encaisser une force F et un couple T (Fig. 4.3), qui sont transmis depuis l'outil, représenté par le point P , jusqu'à la liaison actionnée, par l'intermédiaire de la jambe, composée du parallélogramme puis du pied. Notre modélisation flexible utilise des liaisons élastiques virtuelles. Pour les localiser et les modéliser correctement, il faut comprendre comment les efforts appliqués sont transmis à travers la jambe, et quels sont leurs effets.

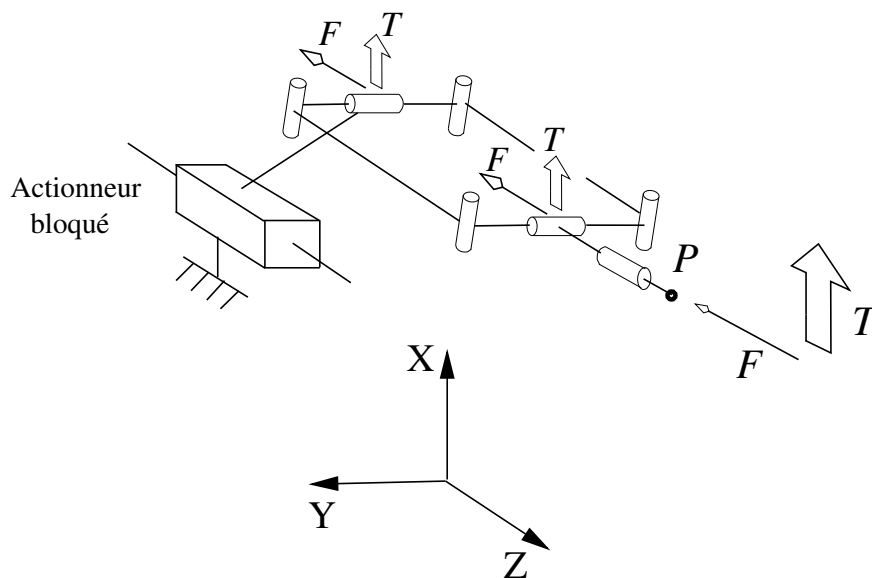
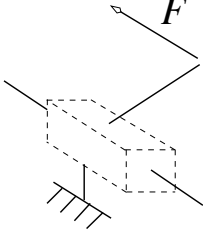
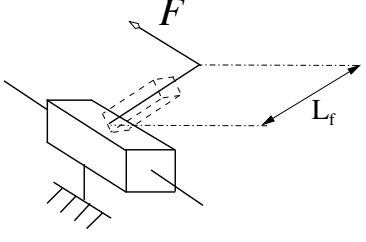
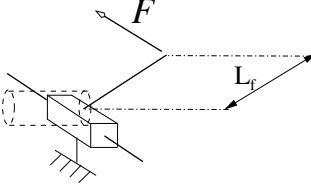
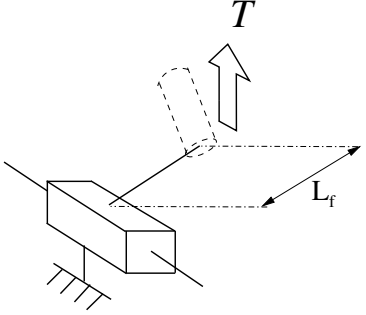
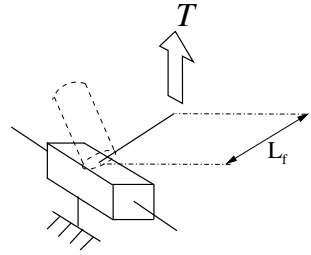
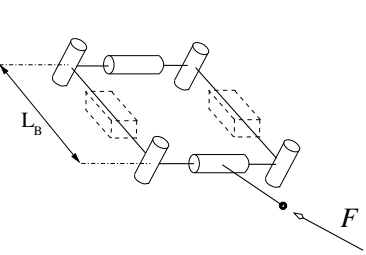
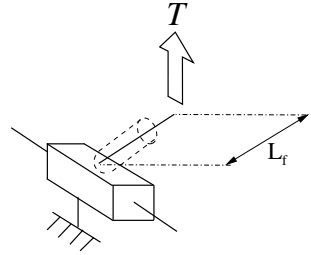
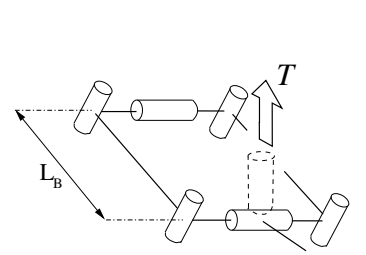


FIG. 4.3 – Forces transmises par une jambe

Huit liaisons élastiques sont modélisées le long de la jambe de l'Orthoglide. Elles sont décrites dans le Tab. 4.2. Le calcul de leur raideur sera détaillé ci-après. La liaison prismatique actionnée est supposée élastique en translation uniquement selon l'axe de la liaison prismatique. En effet d'une part, le *degré de liberté actionné* de la liaison actionnée, ici la translation car c'est une liaison actionnée prismatique, doit faire partie des liaisons élastiques pour que les équations de la méthode utilisée soient respectées. D'autre part, les raideurs translationnelles selon les axes X et Y , ainsi que les raideurs torsionnelles selon les axes X , Y et Z de la liaison actionnée prismatique ne dépendent pas des paramètres géométriques des membrures de l'Orthoglide. Or notre but est de relier les paramètres géométriques de l'Orthoglide à sa raideur statique. L'intérêt de prendre en compte toutes les raideurs de l'actionneur est donc secondaire par rapport à notre objectif principal. Prendre en compte les raideurs de la liaison actionnée permettra par contre d'obtenir un modèle flexible plus proche de la réalité, ce qui est très important.

Raideur	Schéma	Raideur	Schéma
$k_1 = k_{act}$: flexibilité en translation de la liaison prismatique actionnée		$k_5 = \frac{Eh_f b_f}{L_f}$: flexibilité en traction/compression du pied due à la force F	
$k_2 = \frac{3EI_{f1}}{L_f}$: flexibilité en flexion du pied due à la force F		$k_6 = \frac{EI_{f2}}{L_f}$: rotation de la section du pied due au couple T	
$k_3 = \frac{2EI_{f2}}{L_f}$: flexibilité en flexion du pied due au couple T		$k_9 = \frac{2ES_B}{L_B}$: flexibilité en traction/compression des barres du parallélogramme due à la force F	
$k_4 = \frac{GI_{fO}}{L_f}$: flexibilité en torsion du pied due au couple T		$k_{11} = \frac{ES_B d^2 \cos(\beta)}{2L_B}$: flexibilité en tension différentielle des barres du parallélogramme due au couple T	

TAB. 4.2 – Modélisation des raideurs des liaisons élastiques virtuelles

• **Remarque :**

La rigidité des liaisons cinématiques passives qui relient les membrures n'est pas prise en compte dans ce mémoire. Pour une analyse précise de la rigidité d'une PKM, il faudrait la modéliser et la prendre en compte. Par exemple en modélisant la rigidité des liaisons cinématiques avec des liaisons élastiques virtuelles similaires à celles que nous venons de présenter.

Cependant, le modèle de rigidité d'une liaison cinématique dépend du composant technologique choisi pour réaliser cette liaison, or notre but est d'analyser l'influence des paramètres géométriques sur la rigidité. Ce but peut être atteint sans modéliser la rigidité des liaisons cinématiques.

4.2.3 Calcul des raideurs des liaisons élastiques

Dans cette partie on expose le calcul de la raideur de chaque liaison élastique virtuelle présentée dans le Tab. 4.2.

4.2.3.1 Calcul de la raideur k_2 du pied en flexion due à la force F

Le schéma de la Fig. 4.4 permet de comprendre comment est calculée la raideur k_2 de la liaison élastique à partir d'un modèle poutre du pied.

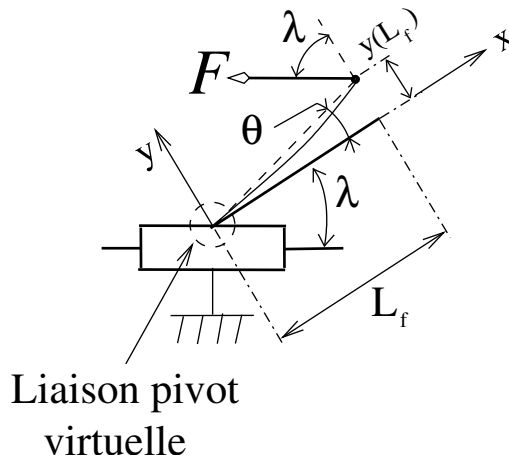


FIG. 4.4 – Flexion du pied due à la force F

On exprime la relation entre la force F appliquée et la dérivée seconde de la déformation notée $y(x)$ (sur la Fig. 4.4 on a représenté la flèche maximale $y(L_f)$) :

$$EI_{f_1} y''(x) = F \cos(\lambda)(L_f - x)$$

On intègre cette expression :

$$\begin{aligned} EI_{f_1} y'(x) &= -F \cos(\lambda)(L_f - x)^2/2 + F \cos(\lambda)L_f^2/2 \\ \hookrightarrow EI_{f_1} y(x) &= F \cos(\lambda)(L_f - x)^3/6 + F \cos(\lambda)L_f^2 x/2 - F \cos(\lambda)L_f^3/6 \end{aligned}$$

Or on a :

$$\begin{aligned} \theta &\simeq y(L_f)/L_f \\ &= F \cos(\lambda)L_f^2/3EI_{f_1} \end{aligned}$$

On obtient la raideur :

$$\begin{aligned} \rightarrow k_2 &= F \cos(\lambda)L_f/\theta \\ k_2 &= 3EI_{f_1}/L_f \end{aligned}$$

4.2.3.2 Calcul de la raideur k_3 du pied en flexion due au couple T

De même on calcule la raideur k_3 de la liaison élastique modélisant la flexion du pied due au couple transmis par la jambe (Fig. 4.5).

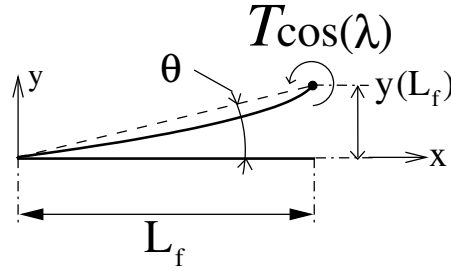


FIG. 4.5 – Flexion du pied due au couple T

On exprime la relation entre la flèche $y(x)$ et le couple T appliqué sur le pied.

$$EI_{f_2}y''(x) = T \cos(\lambda)$$

On intègre cette expression :

$$\begin{aligned} EI_{f_2}y'(x) &= T \cos(\lambda)x \\ \hookrightarrow EI_{f_2}y(x) &= T \cos(\lambda)x^2/2 \end{aligned}$$

Or on a :

$$\begin{aligned} \theta &\simeq y(L_f)/L_f \\ &= T \cos(\lambda)L_f/2EI_{f_2} \end{aligned}$$

On obtient la raideur k_3 :

$$\begin{aligned} \rightarrow k_3 &= T \cos(\lambda)/\theta \\ k_3 &= 2EI_{f_2}/L_f \end{aligned}$$

4.2.3.3 Calcul de la raideur k_4 du pied en torsion due au couple T

On va calculer la raideur k_4 de la liaison élastique modélisant la torsion du pied due au couple transmis par la jambe (Fig. 4.6).

On exprime la relation entre l'angle de torsion $\gamma(x)$ et le couple T appliqué sur le pied.

$$T \sin(\lambda) = \frac{G\gamma(x)I_{fO}}{x}$$

$\gamma(x)$ = angle de rotation autour de l'axe x
de la section droite d'abscisse x

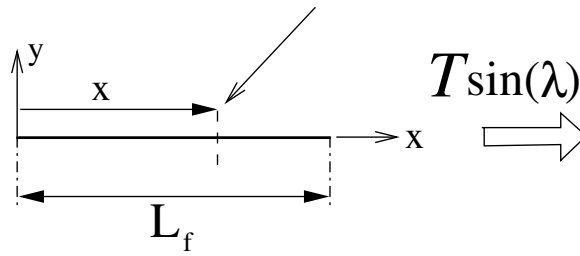


FIG. 4.6 – Torsion du pied due au couple T

On calcule $\gamma(L_f)$:

$$\gamma(L_f) = \frac{T \sin(\lambda) L_f}{G I_{fo}}$$

On en déduit la raideur k_4 :

$$\begin{aligned} \hookrightarrow k_4 &= \frac{T \sin(\lambda)}{\gamma(L_f)} \\ k_4 &= \frac{G I_{fo}}{L_f} \end{aligned}$$

4.2.3.4 Calcul de la raideur k_5 du pied en traction/compression due à l'effort F

On va calculer la raideur k_5 de la liaison élastique modélisant la traction/compression du pied due à la force F transmise par la jambe (Fig. 4.7).

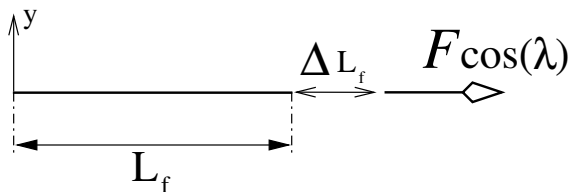


FIG. 4.7 – Traction/compression du pied due à la force F

On exprime la relation entre le déplacement ΔL_f et la force F appliquée sur le pied.

$$\frac{F \cos(\lambda)}{h_f b_f} = \frac{E \Delta L_f}{L_f}$$

On en déduit la raideur k_5 :

$$\begin{aligned} \hookrightarrow k_5 &= \frac{F \cos(\lambda)}{\Delta L_f} \\ &= \frac{E h_f b_f}{L_f} \end{aligned}$$

4.2.3.5 Calcul de la raideur k_6 de la rotation de section du pied due au couple T

On va calculer la raideur k_6 de la liaison élastique modélisant la rotation de section du pied due au couple T transmis par la jambe (Fig. 4.8).

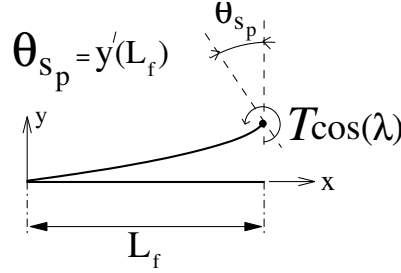


FIG. 4.8 – Rotation de section du pied due au couple T

On exprime la relation entre la dérivée seconde de la flèche $y(x)$ et le couple T appliqué sur le pied.

$$EI_{f_2} y''(x) = T \cos(\lambda)$$

$$EI_{f_2} y'(x) = T \cos(\lambda) x$$

Or :

$$y'(L_f) = \theta_{sp}$$

Donc on a :

$$\theta_{sp} = \frac{T \cos(\lambda) L_f}{2EI_{f_2}}$$

Et on obtient la raideur k_6 :

$$\begin{aligned} \hookrightarrow k_6 &= \frac{T \cos(\lambda)}{\theta_{sp}} \\ k_6 &= \frac{EI_{f_2}}{L_f} \end{aligned}$$

4.2.3.6 Calcul de la raideur k_9 des barres du parallélogramme sollicitées en traction/compression par la force F transmise par la jambe

On calcule la raideur de la liaison élastique modélisant la traction/compression des barres du parallélogramme due à l'effort F transmis par la jambe. Par analogie avec le calcul de la raideur k_5 , on déduit :

$$k_9 = \frac{2ES_B}{L_B}$$

k_9 vaut deux fois la raideur en traction/compression d'une barre.

4.2.3.7 Calcul de la raideur k_{11} du parallélogramme en tension différentielle due au couple T

On calcule la raideur k_{11} de la liaison élastique modélisant la tension différentielle des barres du parallélogramme due au couple transmis par la jambe (Fig. 4.9).

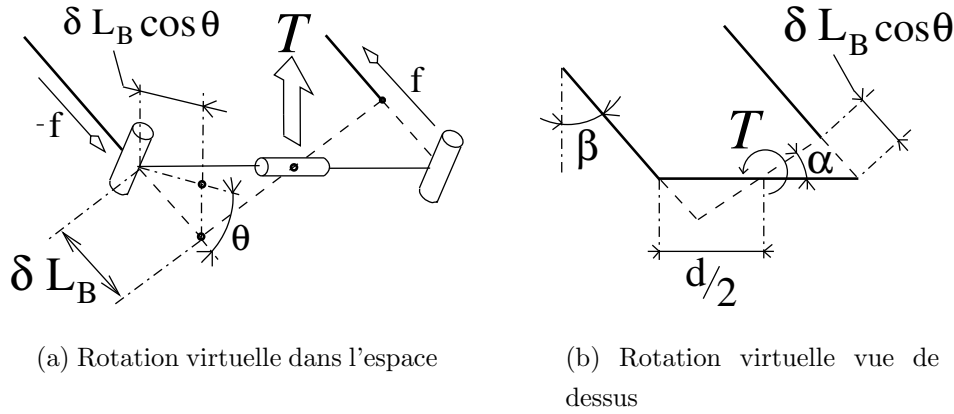


FIG. 4.9 – Rotation virtuelle modélisant l'effet de la tension différentielle dans les barres du parallélogramme

$$\text{On a : } \begin{cases} T = f d \cos(\theta) \cos(\beta) & (1) \\ \delta L_B = f L_B / E S_B & (2) \\ \alpha = \delta L_B \cos(\theta) / (d/2) & (3) \end{cases} \quad (4.1)$$

On en tire :

$$\begin{aligned} (2) \rightarrow (3) : \alpha &= f L_B \cos(\theta) / E S_B (d/2) & (4) \\ (1) \rightarrow (4) : \alpha &= 2 T L_B / E S_B d^2 \cos(\beta) \end{aligned}$$

On obtient la raideur k_{11} :

$$\begin{aligned} \hookrightarrow k_{11} &= T / \alpha \\ k_{11} &= E S_B d^2 \cos(\beta) / 2 L_B \end{aligned}$$

La raideur k_{11} telle qu'on la modélisée dépend de l'angle β , c'est-à-dire de la position Cartésienne de l'outil.

4.2.4 Analyse de l'influence de l'hyperstatisme

L'annexe B propose une analyse de l'influence de l'hyperstatisme sur l'Orthoglide. Cette analyse montre que le modèle isostatique de l'Orthoglide suffit pour décrire le comportement compliant avec notre modèle à liaisons élastiques virtuelles.

4.3 Calcul symbolique de la matrice de raideur

La raideur des liaisons élastiques virtuelles dépend des paramètres géométriques de conception. Dans cette partie, on va montrer comment on obtient les expressions symboliques des éléments de la matrice de raideur en fonction de ces paramètres. La méthode de calcul utilisée pour l'analyse de rigidité des PKM est une méthode qui a déjà été présentée dans [Gosselin 02]. La nouveauté est qu'on l'applique à l'Orthoglide en menant les calculs sous forme symbolique.

4.3.1 Modélisation cinématique d'une jambe

La Fig. 4.10 représente le modèle flexible d'une jambe de l'Orthoglide. Une seule liaison L_9 est représentée mais naturellement les deux barres du parallélogramme sont sollicitées en traction/compression.

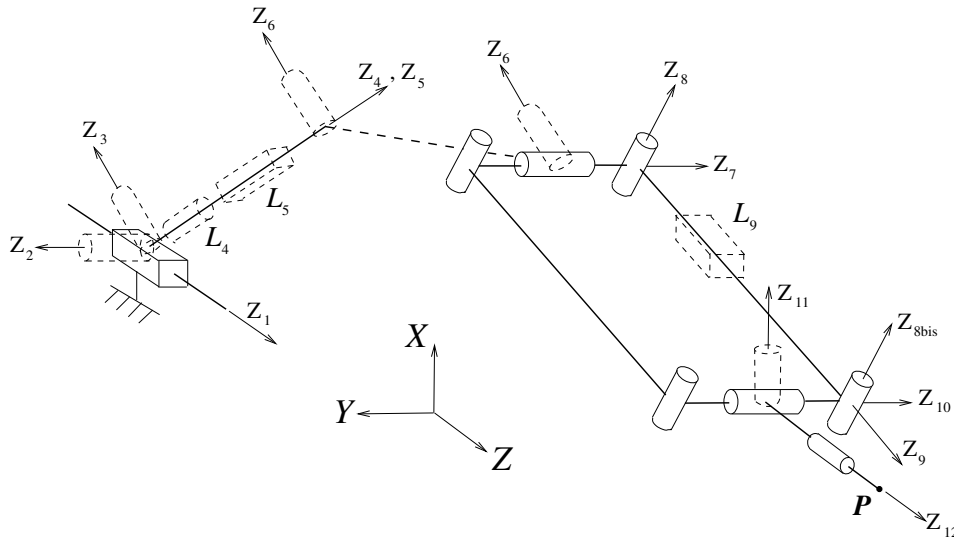


FIG. 4.10 – Modèle de jambe flexible

La matrice Jacobienne \mathbf{J}_i de la jambe i de l'Orthoglide est obtenue à partir des paramètres de Denavit-Hartenberg associés à la jambe i munie de liaisons flexibles (Fig. 4.10 et Tab. 4.3).

La matrice \mathbf{J}_i relie linéairement toutes les vitesses articulaires, incluant les vitesses articulaires des liaisons élastiques virtuelles, aux vitesses Cartésiennes de la plate-forme mobile, i.e.,

$$\mathbf{J}_i \dot{\boldsymbol{\theta}}_i = \mathbf{t}$$

où

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_i^T = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{i_1} & \dot{\theta}_{i_2} & \dot{\theta}_{i_3} & \dot{\theta}_{i_4} & \dot{\theta}_{i_5} & \dot{\theta}_{i_6} & \dot{\theta}_{i_7} & \dot{\theta}_{i_8} & \dot{\theta}_{i_9} & \dot{\theta}_{i_{10}} & \dot{\theta}_{i_{11}} & \dot{\theta}_{i_{12}} \end{bmatrix}$$

est le vecteur qui contient les 12 vitesses articulaires des liaisons actionnées, passives et élastiques de la jambe i . \mathbf{t} est le torseur cinématique de la plate-forme. Le paramétrage de la liai-

N^0	Type de liaison	\mathbf{a}_i	\mathbf{b}_i	α_i	θ_i
1	Prismatique actionnée	0	ρ_1	$\pi/2$	$\theta_1 = \pi$
2	Élastique	0	0	$\pi/2$	$\theta_2 = -\pi/2 + \lambda$
3	Élastique	0	0	$\pi/2$	$\theta_3 = -\pi/2$
4	Élastique	0	0	0	$\theta_4 = 0$
5	Élastique	0	$L_f + \rho_5 (= 0)$	$\pi/2$	$\theta_5 = \pi$
6	Élastique	0	0	$\pi/2$	$\theta_6 = -\pi/2$
7	Cinématique	0	$d/2$	$\pi/2$	θ_7
8	Cinématique	0	0	$\pi/2$	θ_8
9	Élastique	0	$L_B + \rho_9 (= 0)$	$\pi/2$	$\theta_9 = \pi$
8_{bis}	Cinématique	0	0	$\pi/2$	$\theta_{8_{bis}} = -\theta_8$
10	Cinématique	0	$-d/2$	$\pi/2$	$\theta_{10} = \lambda - \theta_7$
11	Élastique	0	0	$\pi/2$	$\theta_{11} = \pi/2$
12	Cinématique	0	e	0	$\theta_{12} = 0$

TAB. 4.3 – Paramètres de Denavit-Hartenberg [Denavit 64] d’une jambe munie de liaisons élastiques

son P_a (pour “Parallélogramme”) impose $\dot{\theta}_{i_8} = -\dot{\theta}_{i_{8bis}}$, et donc $\dot{\theta}_{i_8}$ et $\dot{\theta}_{i_{8bis}}$ sont linéairement dépendants. On choisit par exemple $\dot{\theta}_{i_8}$ pour paramétrer le mouvement de translation circulaire, et finalement \mathbf{J}_i s’écrit

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} 0, & \mathbf{e}_{i_2}, & \mathbf{e}_{i_3}, & \mathbf{e}_{i_4}, & 0, & \mathbf{e}_{i_6}, & \mathbf{e}_{i_7} \\ \mathbf{e}_{i_1}, & \mathbf{e}_{i_2} \times \mathbf{r}_{i_2}, & \mathbf{e}_{i_3} \times \mathbf{r}_{i_3}, & \mathbf{e}_{i_4} \times \mathbf{r}_{i_4}, & \mathbf{e}_{i_5}, & \mathbf{e}_{i_6} \times \mathbf{r}_{i_6}, & \mathbf{e}_{i_7} \times \mathbf{r}_{i_7}, \\ \\ 0, & \mathbf{e}_{i_9}, & \mathbf{e}_{i_{10}}, & \mathbf{e}_{i_{11}}, & \mathbf{e}_{i_{12}} \\ \mathbf{e}_{i_8} \times \mathbf{r}_{i_8} - \mathbf{e}_{i_{8bis}} \times \mathbf{r}_{i_{8bis}}, & \mathbf{e}_{i_9} \times \mathbf{r}_{i_9}, & \mathbf{e}_{i_{10}} \times \mathbf{r}_{i_{10}}, & \mathbf{e}_{i_{11}} \times \mathbf{r}_{i_{11}}, & \mathbf{e}_{i_{12}} \times \mathbf{r}_{i_{12}} \end{bmatrix}$$

où \mathbf{e}_{i_j} est le vecteur unitaire qui dirige la liaison i de la jambe j , et \mathbf{r}_{i_j} est le vecteur qui relie la liaison j de la jambe i au point de référence situé sur la plate-forme mobile, point en lequel on calcule les vitesses Cartésiennes. La matrice Jacobienne peut donc s’écrire de la façon suivante :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{J}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{J}_3 \end{bmatrix}$$

On a donc :

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{R}\mathbf{t} \quad (4.2)$$

$$\text{avec } \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_6 \\ \mathbf{I}_6 \\ \mathbf{I}_6 \end{bmatrix}^T \quad \text{et} \quad \mathbf{t} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix}$$

$\dot{\boldsymbol{\theta}}$ est le vecteur qui contient les 36 variables articulaires, c'est-à-dire $\dot{\boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1^T & \dot{\theta}_2^T & \dot{\theta}_3^T \end{bmatrix} \cdot \mathbf{I}_6$ correspond à la matrice unité 6×6 .

4.3.2 Élimination des variables passives

Les liaisons passives vont être éliminées en écrivant les conditions géométriques qui contraignent les deux chaînes cinématiques fermées indépendantes formant la structure cinématique de l'Orthoglide :

$$\mathbf{J}_1 \dot{\boldsymbol{\theta}}_1 = \mathbf{J}_2 \dot{\boldsymbol{\theta}}_2 \quad (4.3)$$

$$\mathbf{J}_1 \dot{\boldsymbol{\theta}}_1 = \mathbf{J}_3 \dot{\boldsymbol{\theta}}_3 \quad (4.4)$$

Soient $\dot{\boldsymbol{\theta}}'$ et $\dot{\boldsymbol{\theta}}''$, respectivement le vecteurs des variables actionnées et élastiques, et le vecteur des variables passives :

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\theta}}' &= \begin{pmatrix} \dot{\theta}'_1, \dot{\theta}'_2, \dot{\theta}'_3 \end{pmatrix}^T \quad \text{avec} \quad \dot{\boldsymbol{\theta}}'_i = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_{i_1}, \dot{\theta}_{i_2}, \dot{\theta}_{i_3}, \dot{\theta}_{i_4}, \dot{\theta}_{i_5}, \dot{\theta}_{i_6}, \dot{\theta}_{i_9}, \dot{\theta}_{i_{11}} \end{pmatrix}^T \\ \text{et } \dot{\boldsymbol{\theta}}'' &= \begin{pmatrix} \dot{\theta}''_1, \dot{\theta}''_2, \dot{\theta}''_3 \end{pmatrix}^T \quad \text{avec} \quad \dot{\boldsymbol{\theta}}''_i = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_{i_7}, \dot{\theta}_{i_8}, \dot{\theta}_{i_{10}}, \dot{\theta}_{i_{12}} \end{pmatrix}^T \end{aligned}$$

On va éliminer les variables passives en partitionnant les deux équations (4.3) et (4.4) :

$$eq.(4.3) \rightarrow \mathbf{J}'_1 \dot{\boldsymbol{\theta}}'_1 - \mathbf{J}'_2 \dot{\boldsymbol{\theta}}'_2 = \mathbf{J}''_2 \dot{\boldsymbol{\theta}}''_2 - \mathbf{J}''_1 \dot{\boldsymbol{\theta}}''_1 \quad (4.5)$$

$$eq.(4.4) \rightarrow \mathbf{J}'_1 \dot{\boldsymbol{\theta}}'_1 - \mathbf{J}'_3 \dot{\boldsymbol{\theta}}'_3 = \mathbf{J}''_3 \dot{\boldsymbol{\theta}}''_3 - \mathbf{J}''_1 \dot{\boldsymbol{\theta}}''_1 \quad (4.6)$$

avec :

$$\mathbf{J}'_i = \begin{pmatrix} 0, & \mathbf{e}_{i_2}, & \mathbf{e}_{i_3}, & \mathbf{e}_{i_4}, & 0, & \mathbf{e}_{i_6}, & \mathbf{e}_{i_9}, & \mathbf{e}_{i_{11}} \\ \mathbf{e}_{i_1}, & \mathbf{e}_{i_2} \times \mathbf{r}_{i_2}, & \mathbf{e}_{i_3} \times \mathbf{r}_{i_3}, & \mathbf{e}_{i_4} \times \mathbf{r}_{i_4}, & \mathbf{e}_{i_5}, & \mathbf{e}_{i_6} \times \mathbf{r}_{i_6}, & \mathbf{e}_{i_9}, & \mathbf{e}_{i_{11}} \times \mathbf{r}_{i_{11}} \end{pmatrix}$$

et :

$$\mathbf{J}''_i = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{i_7}, & 0, & \mathbf{e}_{i_{10}}, & \mathbf{e}_{i_{12}} \\ \mathbf{e}_{i_7} \times \mathbf{r}_{i_7}, & \mathbf{e}_{i_8} \times \mathbf{r}_{i_8} - \mathbf{e}_{i_{8_{bis}}} \times \mathbf{r}_{i_{8_{bis}}}, & \mathbf{e}_{i_{10}} \times \mathbf{r}_{i_{10}}, & \mathbf{e}_{i_{12}} \times \mathbf{r}_{i_{12}} \end{pmatrix}$$

Soient les matrices \mathbf{A} et \mathbf{B} telles que :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}'_1 & -\mathbf{J}'_2 & 0 \\ \mathbf{J}'_1 & 0 & -\mathbf{J}'_3 \end{pmatrix}_{12 \times 24} \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -\mathbf{J}''_1 & \mathbf{J}''_2 & 0 \\ -\mathbf{J}''_1 & 0 & \mathbf{J}''_3 \end{pmatrix}_{12 \times 12}$$

À partir des équations (4.5) et (4.6), on obtient une relation entre $\dot{\theta}'$ et $\dot{\theta}''$:

$$\mathbf{A}\dot{\theta}' = \mathbf{B}\dot{\theta}''$$

Ainsi :

$$\dot{\theta}'' = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\dot{\theta}'$$

On veut maintenant construire une matrice \mathbf{V} telle que :

$$\dot{\theta} = \mathbf{V}\dot{\theta}' \quad (4.7)$$

Notons au préalable :

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_2 \\ \mathbf{H}_3 \\ \mathbf{H}_4 \\ \mathbf{H}_5 \\ \mathbf{H}_6 \\ \mathbf{H}_7 \\ \mathbf{H}_8 \\ \mathbf{H}_9 \\ \mathbf{H}_{10} \\ \mathbf{H}_{11} \\ \mathbf{H}_{12} \end{pmatrix}_{12 \times 24}$$

avec $[\mathbf{H}_i]_{1 \times 24}$

Il faut ensuite construire la matrice \mathbf{V} :

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{6 \times 6} & 0_{6 \times 18} \\ \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_2 \\ 0_{1 \times 6} & \mathbf{I}_{1 \times 1} & 0_{1 \times 17} \\ \mathbf{H}_3 \\ 0_{1 \times 7} & \mathbf{I}_{1 \times 1} & 0_{1 \times 16} \\ \mathbf{H}_4 \\ 0_{6 \times 8} & \mathbf{I}_{6 \times 6} & 0_{6 \times 10} \\ \mathbf{H}_5 \\ \mathbf{H}_6 \\ 0_{1 \times 14} & \mathbf{I}_{1 \times 1} & 0_{1 \times 9} \\ \mathbf{H}_7 \\ 0_{1 \times 15} & \mathbf{I}_{1 \times 1} & 0_{1 \times 8} \\ \mathbf{H}_8 \\ 0_{6 \times 16} & \mathbf{I}_{6 \times 6} & 0_{6 \times 2} \\ \mathbf{H}_9 \\ \mathbf{H}_{10} \\ 0_{1 \times 22} & \mathbf{I}_{1 \times 1} & 0_{1 \times 1} \\ \mathbf{H}_{11} \\ 0_{1 \times 23} & \mathbf{I}_{1 \times 1} \\ \mathbf{H}_{12} \end{pmatrix}$$

4.3.3 Calcul de la matrice de raideur

À partir des équations (4.2) et (4.7) on peut obtenir :

$$\mathbf{J}\mathbf{V}\dot{\boldsymbol{\theta}}' = \mathbf{R}\mathbf{t} \quad (4.8)$$

Comme la matrice \mathbf{R} correspond à un système de 18 équations linéaires et compatibles à 6 inconnues, la solution des moindres carrés donne une solution exacte à l'équation (4.8) :

$$\mathbf{t} = (\mathbf{R}^T \mathbf{R})^{-1} \mathbf{R}^T \mathbf{J}\mathbf{V}\dot{\boldsymbol{\theta}}'$$

Écrivons \mathbf{J}' de cette façon :

$$\mathbf{J}' = (\mathbf{R}^T \mathbf{R})^{-1} \mathbf{R}^T \mathbf{J}\mathbf{V}$$

On a donc :

$$\mathbf{t} = \mathbf{J}'\dot{\boldsymbol{\theta}}' \quad (4.9)$$

D'après le principe des travaux virtuels on a :

$$\boldsymbol{\tau}^T \dot{\boldsymbol{\theta}}' = \mathbf{w}^T \mathbf{t} \quad (4.10)$$

où $\boldsymbol{\tau}$ est le vecteur contenant les efforts et les couples appliqués sur chaque liaison actionnée ou élastique virtuelle, et \mathbf{w} est le torseur statique extérieur appliqué sur l'effecteur au point \mathbf{P} . On néglige l'action de la gravité par rapport aux efforts appliqués par l'extérieur. En substituant l'équation (4.9) dans l'équation (4.10), et parce que $\dot{\boldsymbol{\theta}}'$ est composée de variables indépendantes, on peut obtenir :

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}'^T \mathbf{w} \quad (4.11)$$

Les forces et les déplacements relatifs à chaque liaison actionnée ou virtuelle élastique sont reliés par la loi de Hooke en utilisant les raideurs calculées au paragraphe 4.2.3. Pour la structure globale, on a :

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{K}_J \Delta \boldsymbol{\theta}' \quad (4.12)$$

avec :

$$\mathbf{K}_J = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{A} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A} \end{bmatrix}$$

et :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} k_{act} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI_{f1}}{L_f} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2EI_{f2}}{L_f} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_{fO}}{L_f} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{Eh_f b_f}{L_f} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EI_{f2}}{L_f} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2ES_B}{L_B} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{ES_B d^2 \cos(\beta)}{L_B} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

$\Delta \boldsymbol{\theta}'$ contient seulement les liaisons actionnées et virtuelles élastiques, donc en réécrivant l'équation (4.11) en tenant compte de l'équation (4.12), on obtient :

$$\mathbf{K}_J \Delta \boldsymbol{\theta}' = \mathbf{J}'^T \mathbf{w}$$

Ainsi :

$$\Delta \boldsymbol{\theta}' = \mathbf{K}_J^{-1} \mathbf{J}'^T \mathbf{w}$$

En pré-multipliant les deux côtés de cette dernière équation par \mathbf{J}' , on obtient :

$$\mathbf{J}' \Delta \boldsymbol{\theta}' = \mathbf{J}' \mathbf{K}_J^{-1} \mathbf{J}'^T \mathbf{w} \quad (4.14)$$

Et en substituant l'équation (4.9) dans l'équation (4.14), on obtient :

$$\mathbf{t} = \mathbf{J}' \mathbf{K}_J^{-1} \mathbf{J}'^T \mathbf{w}$$

L'expression de la matrice de compliance κ est donc :

$$\kappa = \mathbf{J}'\mathbf{K}_J^{-1}\mathbf{J}'^T$$

Dans le cas de l'Orthoglide et avec la modélisation adoptée, on obtient :

$$\kappa = \begin{pmatrix} \kappa_{11} & 0 & 0 & \kappa_{14} & \kappa_{15} & \kappa_{16} \\ 0 & \kappa_{11} & 0 & \kappa_{24} & \kappa_{25} & \kappa_{26} \\ 0 & 0 & \kappa_{11} & \kappa_{34} & \kappa_{35} & \kappa_{36} \\ \kappa_{14} & \kappa_{24} & \kappa_{34} & \kappa_{44} & \kappa_{45} & \kappa_{46} \\ \kappa_{15} & \kappa_{25} & \kappa_{35} & \kappa_{45} & \kappa_{55} & \kappa_{56} \\ \kappa_{16} & \kappa_{26} & \kappa_{36} & \kappa_{46} & \kappa_{56} & \kappa_{66} \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

L'expression de la matrice de raideur \mathbf{K} est donnée par :

$$\mathbf{K} = \kappa^{-1} = (\mathbf{J}'\mathbf{K}_J^{-1}\mathbf{J}'^T)^{-1}$$

4.4 Analyse de l'influence individuelle des liaisons élastiques et simplification du modèle

4.4.1 Intérêts d'une telle analyse

Parmi les liaisons élastiques virtuelles que nous avons modélisées, certaines influent plus que d'autres sur la rigidité. Il est intéressant de rechercher lesquelles, car on ne pourra plus le faire une fois que la matrice de raideur ou de compliance sera calculée sous forme symbolique en fonction des paramètres.

En effet, d'une part il ne sera en général plus possible de savoir à quelle liaison élastique un paramètre se rapporte car il peut intervenir dans plusieurs liaisons élastiques (par exemple, la longueur du pied permet de modéliser sa raideur en torsion et en flexion) ou dans le modèle géométrique. D'autre part, les paramètres sont les mêmes pour chaque jambe (par exemple la longueur des barres est représentée par le même paramètre pour les 3 jambes), donc cela permet encore moins de savoir à quelle liaison élastique un paramètre se rapporte une fois calculée la matrice de raideur ou de compliance.

L'analyse de l'influence de chaque liaison élastique peut enfin être utile pour simplifier le modèle de rigidité en supprimant les liaisons élastiques peu influentes afin d'alléger les calculs.

4.4.2 Choix d'un EDR

La démarche pour l'analyse cinétostatique des PKM à translations est la suivante : on définit une zone saine, l'EDR, puis on y effectue une analyse de rigidité afin d'optimiser la géométrie.

Dans le cas de l'Orthoglide, nous verrons que les paramètres influents pour la rigidité n'ont aucune influence sur les performances cinétostatiques, i.e. sur l'EDR. C'est intéressant, car on peut ainsi découpler l'analyse des performances cinétostatiques et l'analyse de rigidité, et ainsi optimiser la rigidité en sachant que les performances cinétostatiques ne seront pas modifiées.

Dorénavant, nous allons donc travailler dans un EDR possédant les caractéristiques suivantes :

$$\mathcal{W}_{DR} = \{\mathbf{p} \in \mathcal{W} \mid 1/2 \leq \psi_i(\mathbf{p}) \leq 2, i = 1, 2, 3 \mid \mathcal{W}_{DR} \text{ de forme cubique}\}$$

On a vu dans le chapitre précédent que cet EDR correspond à un cube de 0.644m de côté centré sur le point de coordonnées $[0.085, 0.085, 0.085]$, la longueur des barres des parallélogrammes valant 1.

4.4.3 Rigidifier une liaison élastique virtuelle

En programmant sous forme numérique la suite d'équations décrite dans le paragraphe 4.3, on peut observer l'effet individuel de chaque liaison élastique sur la rigidité globale de l'Orthoglide.

Pour observer l'influence individuelle d'une liaison élastique L_i , il faut :

1. Multiplier sa raideur k_i par un très grand chiffre, ce qui revient à la *rigidifier*;
2. Comparer la valeur des éléments K_{ij} de la matrice de raideur initiale aux valeurs des éléments K_{ij} obtenues lorsque la liaison élastique L_i est rigidifiée;
3. Si la valeur de K_{ij} augmente lorsque L_i est rigidifiée, alors L_i a une influence non-négligeable.

Par exemple si l'on veut observer l'influence de la liaison élastique L_3 (voir Fig. 4.10), il faut d'abord multiplier sa raideur k_3 par un grand chiffre, par exemple 10^{20} , dans l'Eq. (4.13).

On obtient alors :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} k_{act} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI_{f1}}{L_f} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2EI_{f2}}{L_f} 10^{20} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_{fO}}{L_f} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{Eh_f b_f}{L_f} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EI_{f2}}{L_f} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2ES_B}{L_B} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{ES_B d^2 \cos(\beta)}{L_B} \end{bmatrix}$$

4.4.4 Influence individuelle de chaque liaison élastique

Afin d'observer l'influence individuelle de chaque liaison élastique, nous allons observer l'évolution des éléments K_{ij} le long du segment Q_1Q_2 (Fig. 4.11). Q_1 et Q_2 sont deux des sommets de l'EDR cubique. Les résultats observés le long de la droite (Q_1Q_2) sont représentatifs de l'influence individuelle de chaque liaison élastique dans tout l'EDR cubique.

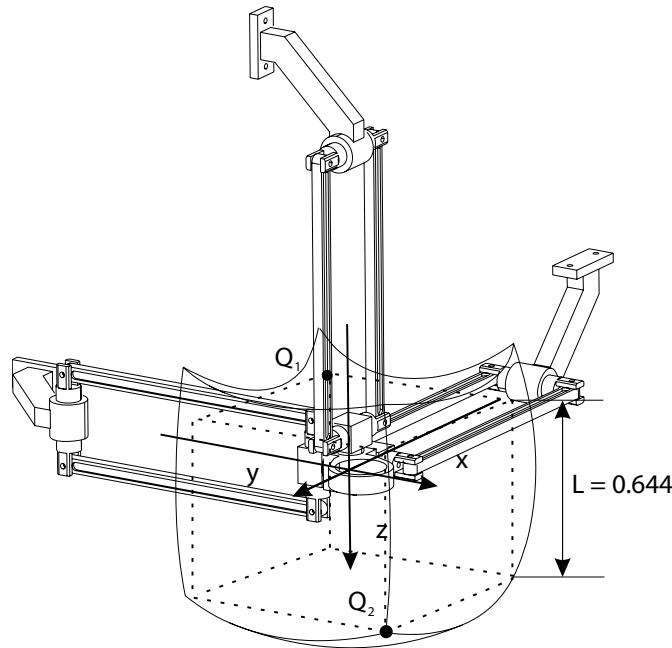


FIG. 4.11 – EDR cubique de l'Orthoglide et droite (Q_1Q_2)

Nous présentons seulement les résultats observés pour les éléments K_{11} et K_{44} car ils sont représentatifs des résultats observés pour les autres éléments K_{ij} .

Sur la Fig. 4.12, on peut observer deux graphiques sur lesquels sont représentées plusieurs courbes. Sur le graphique de gauche se trouve l'évolution de K_{11} le long de Q_1Q_2 et sur le

graphique de droite celle de K_{44} le long de Q_1Q_2 . Sur chaque graphique, chacune des courbes représente l'évolution de K_{11} ou de K_{44} lorsqu'une des liaisons élastiques est rigidifiée. Par exemple la courbe constituée de points épais sur la figure de droite représente l'évolution de K_{44} lorsque L_2 est *rigidifiée*, c'est-à-dire lorsque k_2 est multipliée par 10^{20} .

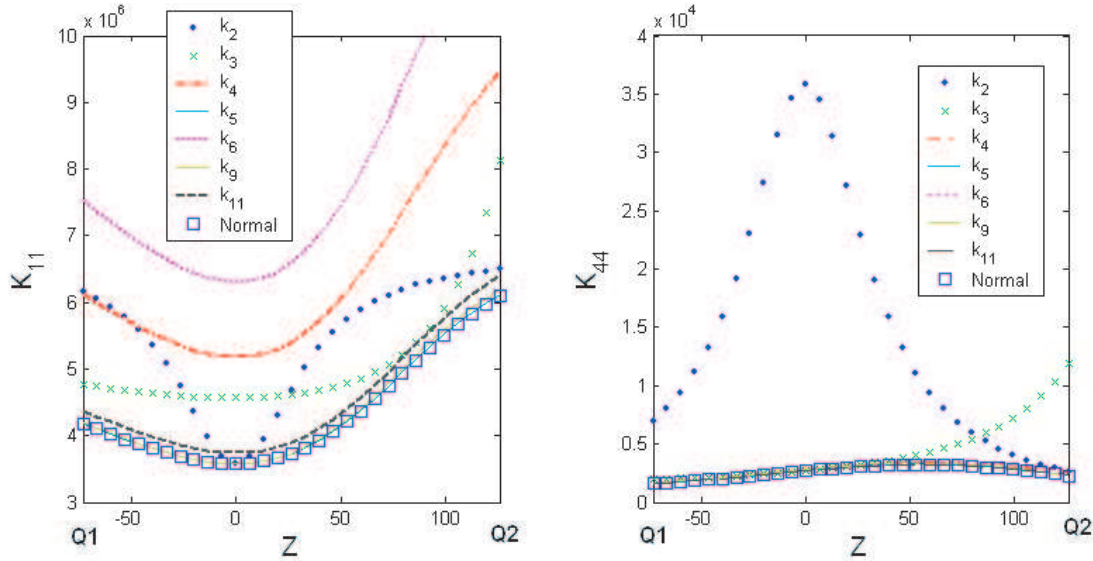


FIG. 4.12 – Influence de chaque liaison élastique

On constate que K_{11} augmente beaucoup lorsque L_6 , L_4 , L_2 ou L_3 sont rigidifiées. K_{11} augmente un peu lorsque L_{11} est rigidifiée. K_{44} augmente lorsque L_2 ou L_3 sont rigidifiées. On peut donc conclure que K_{11} et K_{44} ne dépendent quasiment pas des raideurs k_5 et k_9 , et assez peu de k_{11} . Les liaisons élastiques les plus influentes sont L_2 , L_3 , L_4 et L_6 .

Ce résultat vaut pour un ensemble de paramètres géométriques fixés, qui sont les paramètres initiaux choisis pour le prototype de l'Orthoglide construit à l'IRCCyN. Dans les paragraphes suivants, nous allons faire varier les paramètres géométriques afin d'étudier leur influence sur la rigidité. Il faut donc vérifier que l'observation que nous venons de faire est valable lorsque les paramètres géométriques varient. Il se pourrait en effet que K_{11} et K_{44} deviennent fortement dépendantes de k_5 , k_9 ou k_{11} lorsque la variation de certains paramètres géométriques diminuera les raideurs k_5 , k_9 ou k_{11} .

Les paramètres qui pourraient faire que les raideurs k_5 , k_9 et k_{11} diminuent sont la longueur L_B des barres du parallélogramme, la longueur L_f du pied, la section S_B des barres du parallélogramme et la section h_fb_f du pied. Sur la Fig. 4.13, on peut observer comme précédemment des courbes représentant l'évolution de K_{11} ou de K_{44} lorsqu'une liaison élastique est rigidifiée, mais cette fois la longueur des barres du parallélogramme est multipliée par 3 par rapport à la longueur initiale. Augmenter la longueur des barres diminue les raideurs respectives des liaisons élastiques L_9 et L_{11} . On observe que K_{11} augmente plus nettement lorsque L_{11} est rigidifiée. L_{11} a donc une influence non-négligeable dans ce cas, mais qui reste faible

par rapport à celle des autres liaisons élastiques. Parmi les variations de paramètres auxquelles nous procéderons plus loin pour étudier l'influence sur la rigidité, c'est ce cas i.e. la variation de K_{11} le long de (Q_1Q_2) lorsque la longueur des barres est multipliée par 3, qui provoque la plus grande variation d'influence d'une liaison élastique, en l'occurrence L_{11} . Les observations faites à partir de la Fig. 4.13 restent valables dans tous les autres cas, c'est-à-dire lorsque les autres paramètres S_B , L_f , h_fb_f varient, et pour tous les autres K_{ij} .

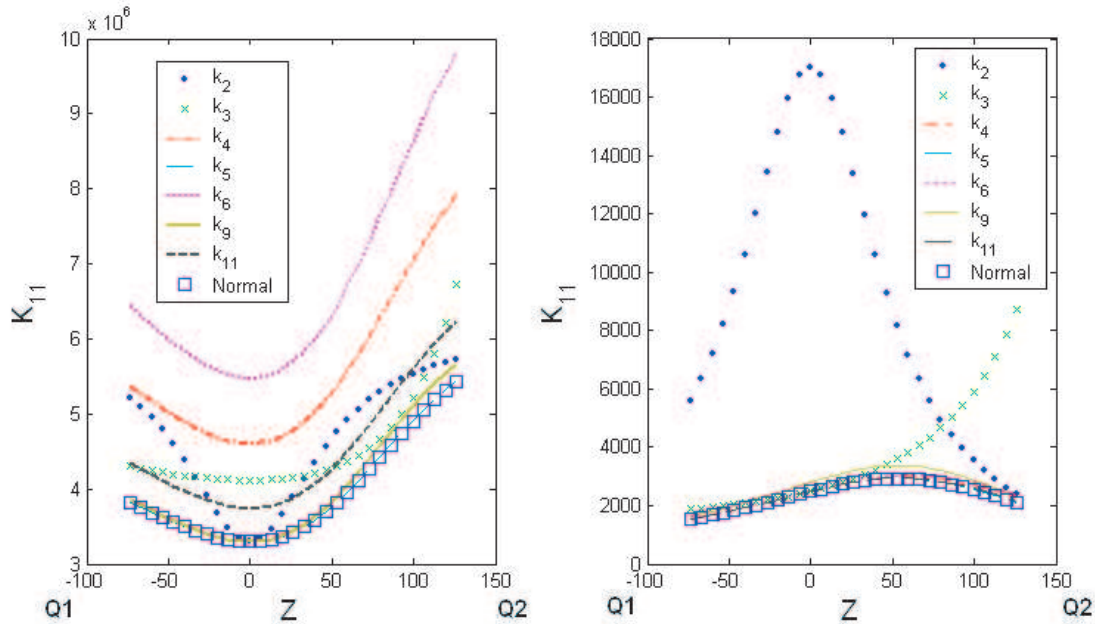


FIG. 4.13 – Influence de chaque liaison élastique lorsque $L_B = 3L_{B_{initiale}}$

Programmer numériquement la suite d'équations décrite dans le paragraphe 4.3 permet de mettre en évidence les liaisons élastiques virtuelles, donc les membrures auxquelles elles se rapportent, qui sont critiques pour la rigidité, ce qui est très utile pour un concepteur : on observe que les liaisons élastiques critiques sont liées au pied, ce qui est intéressant parce le pied est une membrure que l'on peut renforcer, en élargissant sa section par exemple, sans nuire aux performances cinématiques de l'ensemble (collisions internes, volume de l'espace de travail). Le problème posé par l'augmentation de la section h_fb_f sera l'augmentation du poids de cette membrure qui dégradera les performances dynamiques. Nous traiterons cette remarque dans le paragraphe 4.6.1.

Plutôt que de procéder numériquement pour observer l'influence d'une flexibilité, on pourrait, si l'on calculait l'expression symbolique de la matrice de raideur en fonction des k_i , calculer la dérivée des K_{ij} par rapport aux k_i afin de mettre en évidence les flexibilités les plus influentes.

4.4.5 Nouveau modèle de jambe flexible

Nous venons de montrer comment détecter les liaisons élastiques qui sont moins influentes et peuvent être négligées. On peut choisir de les retirer du modèle de rigidité afin d'alléger les expressions symboliques à calculer. Nous allons par exemple supprimer la liaison élastique L_5 correspondant à la traction/compression dans le pied. En effet cette liaison élastique est celle qui a le moins d'influence comparée aux autres.

Nous définissons donc un nouveau modèle de jambe flexible comportant une liaison élastique en moins (Fig. 4.14). Les nouveaux paramètres de Denavit-Hartenberg sont définis dans le Tab. 4.4.

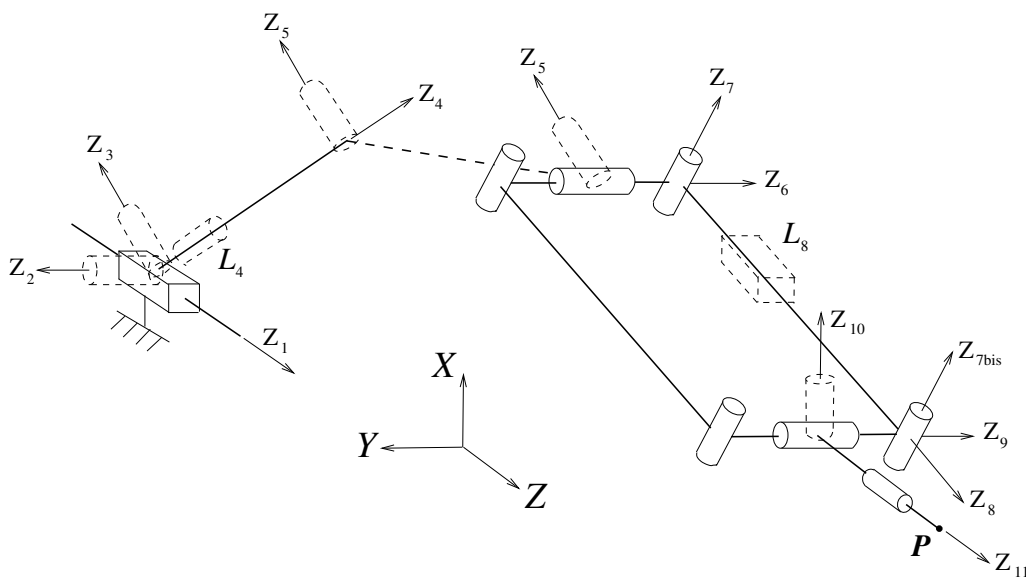


FIG. 4.14 – Nouveau modèle de jambe flexible

4.5 Décomposition en cascade des expressions symboliques

Le calcul symbolique des éléments de la matrice de complaisance est réalisé en programmant la méthode décrite dans le paragraphe 4.3 avec le logiciel MAPLE. Le calcul des éléments de la matrice de complaisance prend environ 12 heures avec un PC à 1Ghz et 256MB de RAM.

La quantité de RAM est importante pour que MAPLE puisse manipuler les expressions symboliques. Le temps de calcul varie selon les simplifications — avec des fonctions MAPLE — que l'on impose à chaque élément. Les simplifications importantes que nous avons employées sont décrites à l'Annexe C.

N^0	Type de liaison	\mathbf{a}_i	\mathbf{b}_i	α_i	θ_i
1	Prismatique actionnée	0	ρ_1	$\pi/2$	$\theta_1 = \pi$
2	Élastique	0	0	$\pi/2$	$\theta_2 = -\pi/2 + \lambda$
3	Élastique	0	0	$\pi/2$	$\theta_3 = -\pi/2$
4	Élastique	0	L_f	$\pi/2$	$\theta_4 = \pi$
5	Élastique	0	0	$\pi/2$	$\theta_5 = -\pi/2$
6	Cinématique	0	$d/2$	$\pi/2$	θ_6
7	Cinématique	0	0	$\pi/2$	θ_7
8	Élastique	0	$L_B + \rho_9(=0)$	$\pi/2$	$\theta_8 = \pi$
7_{bis}	Cinématique	0	0	$\pi/2$	$\theta_{7_{bis}} = -\theta_7$
9	Cinématique	0	$-d/2$	$\pi/2$	$\theta_9 = \lambda - \theta_6$
10	Élastique	0	0	$\pi/2$	$\theta_{10} = \pi/2$
11	Cinématique	0	e	0	$\theta_{11} = 0$

TAB. 4.4 – Paramètres de Denavit-Hartenberg du nouveau modèle de jambe flexible

Nous avons essayé de calculer la matrice de raideur \mathbf{K} sous forme symbolique en inversant la matrice de complaisance. Nous avons utilisé un PC à 1.8Ghz et 1GB de RAM. Le calcul n'aboutit pas au bout d'une journée. C'est un échec : en effet même si le calcul de \mathbf{K} sous forme symbolique peut aboutir, une journée de calcul implique déjà que l'affichage de ses éléments K_{ij} à l'écran sous forme symbolique donnera un fichier de calcul MAPLE trop lourd à manipuler même avec un PC à 1.8Ghz et 1GB de RAM.

Il nous semble donc plus facile de travailler sur les éléments de la matrice de complaisance κ sous forme symbolique. La complaisance de l'Orthoglide augmente si la valeur absolue des éléments κ_{ij} augmente. C'est l'inverse de la rigidité, en d'autres termes plus la complaisance augmente, plus la rigidité diminue.

Bien que le fichier MAPLE obtenu ne soit pas trop lourd à manipuler lorsque l'on travaille avec les éléments κ_{ij} , les expressions symboliques sont visuellement inutilisables telles quelles, car elles sont contenues sur plusieurs pages de calcul. Pour s'en rendre compte, il faut observer certaines des expressions symboliques obtenues qui sont présentées en Annexe C.

Nous présentons donc une procédure pour décomposer ces expressions symboliques. Cette procédure peut s'appliquer à toute expression symbolique qu'il n'est pas possible de visualiser telle quelle. Nous appelons cette procédure une *décomposition en cascade*, dont la mise en oeuvre est utile pour l'interprétation des expressions symboliques. Nous décrivons maintenant cette procédure dans un cas général.

Soit $P(x_1, x_2 \dots x_n)$ un polynôme à n variables, dont la visualisation de l'expression sym-

bolique nécessite de nombreuses pages. Décomposons $P(x_1, x_2 \dots x_n)$ selon une procédure de décomposition en cascade. Tout d'abord, ce polynôme multivariable est considéré comme un polynôme monovarié dont on extrait les coefficients, ce que permet facilement MAPLE. Ensuite, soit $P(x_1)$ le polynôme monovarié obtenu à partir de $P(x_1, x_2 \dots x_n)$. Les coefficients a_i du polynôme $P(x_1) = a_{q_1}x_1^{q_1} + a_{q_1-1}x_1^{q_1-1} + \dots + a_1x_1 + a_0$ sont ensuite collectés comme des polynômes à $(n-1)$ variables de type $a_i(x_2, x_3 \dots x_n)$. La même procédure est ensuite appliquée aux polynômes $a_i(x_2, x_3 \dots x_n)$: ceux-ci sont transformés en polynômes monovariés $a_i(x_2)$ dont les coefficients sont extraits et considérés comme des polynômes à $(n-1)$ variables de type $a_i(x_3, x_4 \dots x_n)$... et ainsi de suite. Il ne reste à la fin que des coefficients numériques. La méthode est illustrée ci-après :

$$\begin{aligned}
 \circ \quad P(x_1, x_2 \dots x_n) &\rightarrow P(x_1) = a_{q_1}x_1^{q_1} + \dots a_{i_1}x_1^{i_1} + \dots a_1x_1 + a_0 \\
 &\swarrow \\
 \circ \quad a_{i_1}(x_2, x_3 \dots x_n) &\rightarrow a_{i_1}(x_2) = a_{q_2}x_2^{q_2} + \dots a_{i_2}x_2^{i_2} + \dots a_1x_2 + a_0 \quad (i_1 = 0 \dots q_1) \\
 &\swarrow \\
 \circ \quad a_{i_2}(x_3, x_4 \dots x_n) &\rightarrow a_{i_2}(x_3) = a_{q_3}x_3^{q_3} + \dots a_{i_3}x_3^{i_3} + \dots a_1x_3 + a_0 \quad (i_2 = 0 \dots q_2) \\
 &\vdots \\
 \circ \quad a_{i_{n-1}}(x_n) &\rightarrow a_{i_{n-1}}(x_n) = a_{q_n}x_n^{q_n} + \dots a_{i_n}x_n^{i_n} + \dots a_1x_n + a_0 \quad (i_{n-1} = 0 \dots q_{n-1})
 \end{aligned}$$

les derniers coefficients a_{i_n} ($i_n = 1 \dots q_n$) du polynôme $a_{i_{n-1}}(x_n)$ sont des nombres.

Nous allons maintenant traiter un exemple de décomposition en cascade d'un élément κ_{ij} de la matrice de complaisance κ . Prenons par exemple l'élément κ_{44} . On extrait de κ_{44} le numérateur $N_{\kappa_{44}}$ et le dénominateur $D_{\kappa_{44}}$. Après simplifications, $N_{\kappa_{44}}$ (resp. $D_{\kappa_{44}}$) est une fonction de 15 (resp. 10) paramètres :

$$\kappa_{44} = \frac{N_{\kappa_{44}}(L_f, h_f, b_f, \cos(\lambda), \sin(\lambda), L_B, S_B, d, e, x, y, z, P_1, P_2, P_3, P_{12}, P_{13}, P_{23}, k_{act}, E)}{D_{\kappa_{44}}(h_f, b_f, d, S_B, x, y, z, P_1, P_2, P_3, P_{12}, P_{13}, P_{23}, k_{act}, E)}$$

Le Tab. 4.5 décrit les différents paramètres et leur degré dans $N_{\kappa_{44}}$ et $D_{\kappa_{44}}$. On retrouve les paramètres géométrique sur la Fig. 4.1.

Voici la décomposition en cascade de $N_{\kappa_{44}}$, l'ordre dans lequel les variables sont extraites est arbitraire :

$$\begin{aligned}
 N_{\kappa_{44}}(L_f \dots k_{act}) &\rightarrow N_{\kappa_{44}}(L_f) = a_3L_f^3 + a_2L_f^2 + a_1L_f + a_0 \\
 \hookrightarrow a_{i_1}(h_f \dots k_{act}) &\rightarrow a_{i_1}(h_f) = b_5h_f^5 + \dots + b_1h_f + b_0 \quad (i_1 = 0, 1, 2, 3) \\
 \hookrightarrow b_{i_2}(b_f \dots k_{act}) &\rightarrow b_{i_2}(b_f) = c_5b_f^5 + \dots + c_1b_f + c_0 \quad (i_2 = 0, 1 \dots 5) \\
 \hookrightarrow c_{i_3}(\cos(\lambda) \dots k_{act}) &\rightarrow c_{i_3}(\cos(\lambda)) = d_2\cos^2(\lambda) + d_1\cos(\lambda) + d_0 \quad (i_3 = 0, 1 \dots 5) \\
 \hookrightarrow d_{i_4}(\sin(\lambda) \dots k_{act}) &\rightarrow d_{i_4}(\sin(\lambda)) = e_1\sin(\lambda) + e_0 \quad (i_4 = 0, 1, 2)
 \end{aligned}$$

Paramètre	Degré		Description
	Dans $N_{\kappa_{44}}$	Dans $D_{\kappa_{44}}$	
L_f	3	0	Longueur du pied, voir Fig.4.1
h_f, b_f	5	5	Dimensions de la section du pied
$\cos(\lambda)$	2	0	λ est l'angle entre l'axe du pied et l'axe de la liaison prismatique
$\sin(\lambda)$	1	0	idem
L_B	7	0	Longueur des barres du parallélogramme
d	2	2	Distance entre les barres du parallélogramme
S_B	1	1	Surface de la section droite des barres du parallélogramme
e	2	0	Voir Fig. 4.1
x, y, z	4	2	Coordonnées Cartésienne X, Y, Z
P_{12}, P_{23}, P_{13}	1	2	$P_{12} = \sqrt{L_B^2 - x^2 - y^2},$ $P_{23} = \sqrt{L_B^2 - y^2 - z^2},$ $P_{13} = \sqrt{L_B^2 - x^2 - z^2}$
P_1, P_2, P_3	1	1	$P_1 = \sqrt{L_B^2 - x^2},$ $P_2 = \sqrt{L_B^2 - y^2},$ $P_3 = \sqrt{L_B^2 - z^2}$
E	1	1	Module d'Young
k_{act}	1	1	Raideur de l'actionneur

TAB. 4.5 – Variables dans $N_{\kappa_{44}}$ et $D_{\kappa_{44}}$

$$\begin{aligned}
\hookrightarrow e_{i_5}(L_B \dots k_{act}) &\rightarrow e_{i_5}(L_B) = f_7 L_B^7 + \dots + f_0 \quad (i_5 = 0, 1) \\
\hookrightarrow f_{i_6}(d \dots k_{act}) &\rightarrow f_{i_6}(d) = g_2 d^2 + g_1 d + g_0 \quad (i_6 = 0, 1 \dots 7) \\
\hookrightarrow g_{i_7}(S_B \dots k_{act}) &\rightarrow g_{i_7}(S_B) = h_1 S_B + h_0 \quad (i_7 = 0, 1, 2) \\
\hookrightarrow h_{i_8}(e \dots k_{act}) &\rightarrow h_{i_8}(e) = i_2 e^2 + i_1 e + i_0 \quad (i_8 = 0, 1) \\
\hookrightarrow i_{i_9}(x \dots k_{act}) &\rightarrow i_{i_9}(x) = j_4 x^4 + \dots + j_0 \quad (i_9 = 0, 1, 2) \\
\hookrightarrow j_{i_{10}}(y \dots k_{act}) &\rightarrow j_{i_{10}}(y) = k_4 y^4 + \dots + k_0 \quad (i_{10} = 0, 1 \dots 4) \\
\hookrightarrow k_{i_{11}}(z \dots k_{act}) &\rightarrow k_{i_{11}}(z) = m_4 z^4 + \dots + m_0 \quad (i_{11} = 0, 1 \dots 4) \\
\hookrightarrow m_{i_{12}}(P_{12} \dots k_{act}) &\rightarrow m_{i_{12}}(P_{12}) = n_1 P_{12} + n_0 \quad (i_{12} = 0, 1 \dots 4) \\
\hookrightarrow n_{i_{13}}(P_{23} \dots k_{act}) &\rightarrow n_{i_{13}}(P_{23}) = p_1 P_{23} + p_0 \quad (i_{13} = 0, 1) \\
\hookrightarrow p_{i_{14}}(P_{13} \dots k_{act}) &\rightarrow p_{i_{14}}(P_{13}) = q_1 P_{13} + q_0 \quad (i_{14} = 0, 1) \\
\hookrightarrow q_{i_{15}}(P_1 \dots k_{act}) &\rightarrow q_{i_{15}}(P_1) = r_1 P_1 + r_0 \quad (i_{15} = 0, 1) \\
\hookrightarrow r_{i_{16}}(P_2 \dots k_{act}) &\rightarrow r_{i_{16}}(P_2) = s_1 P_2 + s_0 \quad (i_{16} = 0, 1) \\
\hookrightarrow s_{i_{17}}(P_3, E, k_{act}) &\rightarrow s_{i_{17}}(P_3) = t_1 P_3 + t_0 \quad (i_{17} = 0, 1) \\
\hookrightarrow t_{i_{18}}(E, k_{act}) &\rightarrow t_{i_{18}}(E) = u_1 E + u_0 \quad (i_{18} = 0, 1) \\
\hookrightarrow u_{i_{19}}(k_{act}) &\rightarrow r_{i_{19}}(k_{act}) = v_1 k_{act} + v_0 \quad (i_{16} = 0, 1)
\end{aligned}$$

Il n'est pas possible d'isoler complètement les variables L_B , x , y et z à cause des racines carrées des termes P_1 , P_2 , P_3 , P_{12} , P_{13} , P_{23} qui subsistent.

4.6 Analyse paramétrique de la complaisance

Dans cette partie, nous allons observer l'influence des paramètres géométriques de l'Orthoglide sur les éléments de la matrice de complaisance. Cela illustrera les possibilités offertes par le calcul de la matrice de complaisance sous forme symbolique.

4.6.1 Dans la configuration isotrope

4.6.1.1 Expressions symboliques simples

Il est intéressant de commencer par observer la matrice de complaisance en ce point car elle est diagonale et les expressions symboliques de ses éléments sont peu volumineuses. Il est possible dans ce cas d'obtenir une expression simple de la matrice de complaisance et par conséquent de son inverse la matrice de raideur, qui s'écrit :

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} K_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_b \end{pmatrix}$$

Le premier des deux différents éléments de \mathbf{K} est K_a , la raideur torsionnelle

$$K_a = \frac{E}{\frac{2L_B}{S_B d^2} + \frac{2L_p(78b_f^2 + \cos^2 \lambda(45h_f^2 - 33b_f^2))}{5h_f b_f^3(b_f^2 + h_f^2)}} \quad (4.16)$$

et le deuxième est K_b , la raideur translationnelle

$$K_b = \frac{1}{\frac{1}{k_{act}} + \frac{L_B}{2S_B E} + \frac{4L_f^3 \sin^2 \lambda}{E h_f^3 b_f}} \quad (4.17)$$

L'intérêt de travailler à l'isotropie est ici de disposer d'expressions symboliques faciles à interpréter.

4.6.1.2 Analyse qualitative

Observons l'expression symbolique de la raideur torsionnelle K_a . La présence du module d'Young E au numérateur fait que son influence est facile à anticiper : K_a augmente lorsque E augmente, ce qui est conforme à l'intuition. On reconnaît par ailleurs dans le terme $\frac{2L_B}{S_B d^2}$ l'influence de la liaison élastique L_{10} . K_a diminue lorsque la longueur des barres L_B augmente, et diminue lorsque la section des barres S_B augmente, ce qui est conforme à l'intuition. Notons que K_a diminue lorsque d augmente. Ceci est conforme à l'analyse de l'expression de la raideur de la liaison élastique K_{10} , qui augmente lorsque d augmente. Cette information est néanmoins intéressante car elle ne peut pas être obtenue sans utiliser un modèle de rigidité que l'on peut résoudre analytiquement.

K_a possède un autre terme, $\frac{2L_p(78b_f^2 + \cos^2 \lambda(45h_f^2 - 33b_f^2))}{5h_f b_f^3(b_f^2 + h_f^2)}$, dans lequel on reconnaît l'influence des liaisons élastiques L_3 , L_4 et L_5 . On observe que K_a diminue lorsque L_f augmente, ce qui n'est pas une surprise. L'observation du degré en h_f et en b_f aux numérateur et dénominateur laisse penser que la raideur augmente avec h_f ou b_f . Par contre l'influence de λ dépend du signe de l'expression $(45h_f^2 - 33b_f^2)$.

Observons maintenant l'expression symbolique de la raideur translationnelle K_b . On reconnaît l'influence de l'actionneur dans le terme $\frac{1}{k_{act}}$, la raideur K_b augmentant logiquement lorsque k_{act} augmente. Par ailleurs on reconnaît dans le terme $\frac{L_B}{2S_B E}$ l'influence de la liaison élastique L_8 . Conformément à l'intuition, K_b augmente lorsque S_B ou E augmentent, et diminue lorsque L_B augmente. L'observation du terme $\frac{4L_f^3 \sin^2 \lambda}{E h_f^3 b_f}$, dans lequel on reconnaît l'influence des liaisons élastiques liées au pied, montre que si λ augmente, avec $0 \leq \lambda \leq \pi/2$, alors $\sin^2 \lambda$ augmente et par conséquent K_b diminue (si $\lambda \geq \pi/2$ on perd l'intérêt du pied, qui est d'éviter les collisions entre l'axe prismatique actionné et le parallélogramme ; et on a forcément $\lambda \geq 0$ pour éviter les interférences entre le pied et l'axe prismatique actionné). Par ailleurs, augmenter la longueur du pied L_f diminue K_b , tandis que si h_f ou b_f augmentent alors K_b augmente.

Ces observations sont qualitatives. Pour analyser plus finement l'influence des paramètres, il faut observer cette influence lorsqu'ils varient à partir d'une valeur initiale. C'est ce que nous allons faire en analysant quantitativement ces expressions symboliques.

4.6.1.3 Analyse quantitative

Nous allons utiliser les expressions symboliques de K_a et K_b pour observer graphiquement l'influence des paramètres géométriques.

Pour cela, nous allons faire varier les paramètres par rapport à leur valeur initiale et observer l'évolution de K_a et de K_b . Ces valeurs initiales sont celles qui ont été choisies pour construire

le prototype de l'Orthoglide à l'IRCCyN (Tab. 4.6).

Paramètre	Valeur initiale
L_f	150mm
h_f	26mm
b_f	16mm
λ	$\frac{\pi}{4}$ rad
d	80mm
L_B	310mm
S_B	144mm ²

TAB. 4.6 – Valeur initiale de chaque paramètre variable

Les paramètres k_{act} et E ne sont pas variables car ils ne sont pas des paramètres géométriques. Nous choisissons $E = 7.10^4 \text{ Nmm}^{-2}$ (matériau aluminium) et $k_{act} = 10^5 \text{ Nmm}^{-1}$. La raideur de l'actionneur dépend de plusieurs paramètres (composants mécaniques, puissance du moteur, commande), la valeur choisie pour k_{act} correspond à un ordre de grandeur courant.

Pour observer graphiquement l'influence des paramètres, nous allons superposer plusieurs courbes sur un même graphique. Chaque courbe représentera un rapport $\frac{K_a(t)}{K_{a_{initiale}}}$ (resp. $\frac{K_b(t)}{K_{b_{initiale}}}$), dans lequel t sera le pourcentage de variation d'un des paramètres (L_f , b_f , h_f , λ , L_B , S_B ou d), les autres paramètres restant constants et fixés à leur valeur initiale, et $K_{a_{initiale}}$ (resp. $K_{b_{initiale}}$) sera la valeur initiale de la raideur torsionnelle (resp. translationnelle) lorsque tous les paramètres prennent la valeur qui a été choisie pour le prototype. L'influence des paramètres est ainsi mieux mise en évidence. Toutes les courbes $\frac{K_a(t)}{K_{a_{initiale}}}$ (resp. $\frac{K_b(t)}{K_{b_{initiale}}}$) se coupent au point d'abscisse $t = 0\%$.

Par exemple, dans l'expression symbolique de K_a , on remplace tous les paramètres par leur valeur initiale sauf L_f . On obtient une expression $K_a(L_f)$:

$$K_a(L_f) = \frac{0.56 \times 10^9}{L_f}$$

Dans cette expression (qui est l'équation d'une hyperbole) on remplace la variable L_f par l'expression $L_{f_{initiale}}(1 + \frac{t}{100})$. On obtient une expression $K_a(t)$:

$$K_a(t) = \frac{0.56 \times 10^9}{150 + 1.5t}$$

t représente le pourcentage de variation de L_f . On calcule $K_a(t = 0)$ pour obtenir la valeur de $K_{a_{initiale}}$ et on peut tracer la courbe d'équation $K_a(t)/K_{a_{initiale}}$. Volontairement, on fera varier t exagérément (de -100% à $+200\%$) pour observer l'influence extrême de chaque paramètre. On superposera les différentes courbes $K_a(t)/K_{a_{initiale}}$ obtenues lorsque les paramètres (L_f , b_f , h_f , λ , d , L_B , S_B) varient.

On pourra ainsi comparer l'influence de chaque paramètre. On affecte une couleur par paramètre, la légende des couleurs est donnée dans le Tab. 4.7.

Couleur	Paramètre variable
Rose	L_f
Rouge	h_f
Vert	b_f
Noir	λ
Bleu foncé	S_B
Bleu clair	d
Jaune	L_B

TAB. 4.7 – Couleurs associées aux paramètres variables

• Analyse de K_a

La Fig. 4.15 montre l'influence des différents paramètres sur K_a . On voit que L_B (jaune), d (bleu clair) et S_B (bleu) ont peu d'influence par rapport à L_f (violet), h_f (rouge), b_f (vert) et λ (noir).

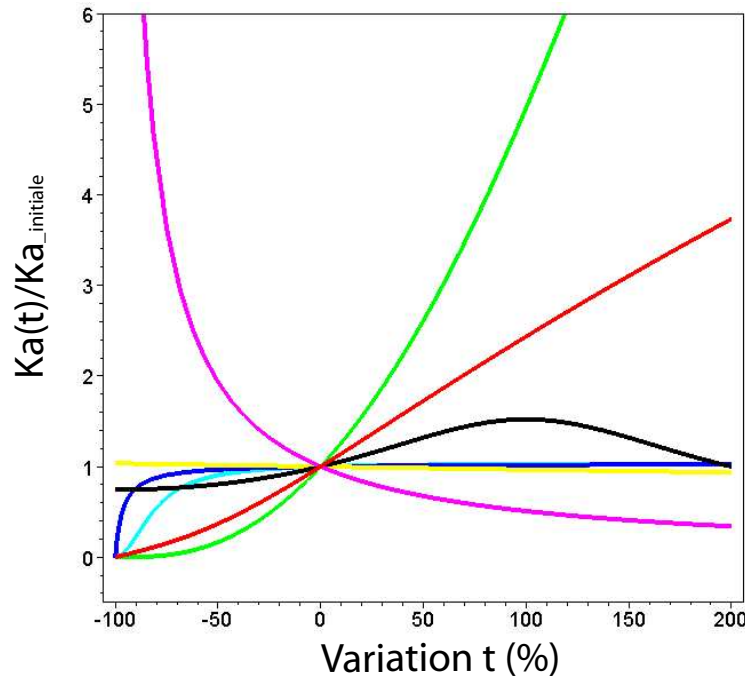


FIG. 4.15 – Influence des paramètres sur K_a

On observe que $K_a(\lambda)$ est maximum (augmentation de 52%) lorsque λ augmente de 100%, c'est-à-dire lorsque $\lambda = \pi/2$. On peut comprendre que $K_a(\lambda)$ sera maximum lorsque $\lambda = \pi/2$ en observant l'expression symbolique de K_a . En effet les valeurs initiales choisies pour h_f et b_f ($h_f = 26$, $b_f = 16$) donnent un signe positif à l'expression $(45h_f^2 - 33b_f^2)$. Le dénominateur de

K_a sera donc minimum lorsque $\lambda = \pi/2$.

Lorsque $\lambda = \pi/2$, les liaisons élastiques L_3 et L_5 ne sont pas sollicitées par le couple transmis par la jambe (Fig. 4.16). Seules L_4 et L_{10} sont sollicitées par le couple. Ceci est une explication *physique* du fait que $K_a(\lambda)$ est maximum lorsque $\lambda = \pi/2$.

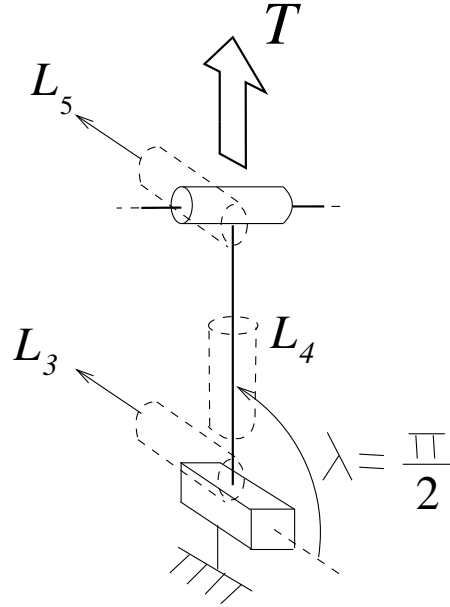


FIG. 4.16 – L_3 et L_5 ne sont pas sollicitées lorsque $\lambda = \pi/2$

D'autre part, on constate qu'une augmentation de b_f (vert) accroît K_a davantage qu'une augmentation de h_f (rouge). Ces deux paramètres définissent la section droite du pied. Ils interviennent dans les moments quadratiques dont dépendent les raideurs du pied en flexion et en torsion.

Si la longueur du pied L_f augmente, on constate logiquement que K_a diminue, car les raideurs des liaisons élastiques modélisant la flexion du pied diminuent. Réciproquement si L_f diminue, alors K_a augmente de façon importante.

Enfin on constate que si d , S_B , h_f ou b_f tendent vers 0, alors K_a tend également vers 0. Ceci peut s'observer à partir de l'expression symbolique de K_a , mais correspond surtout à une réalité physique. Si le pied ou les barres ont une section très petite, ou si le parallélogramme perd sa capacité à encaisser un couple (lorsque $d = 0$), alors le mécanisme perd toute sa raideur torsionnelle.

Les deux paramètres aux influences les plus importantes pour K_a sont L_f et b_f , et on a :

$$K_a(L_f) = \frac{0.56 \times 10^9}{L_f}$$

et

$$K_a(b_f) = \frac{0.419328 \times 10^9 b_f^3 (b_f^2 + 676)}{2724.28 b_f^3 + 4.03 b_f^5 + 210263040 + 850176 b_f^2}$$

• Analyse de K_b

La Fig. 4.17 montre l'influence des différents paramètres sur K_b . On voit que L_B (jaune) et S_B (bleu) ont peu d'influence par rapport à L_f (violet), h_f (rouge), b_f (vert) et λ (noir).

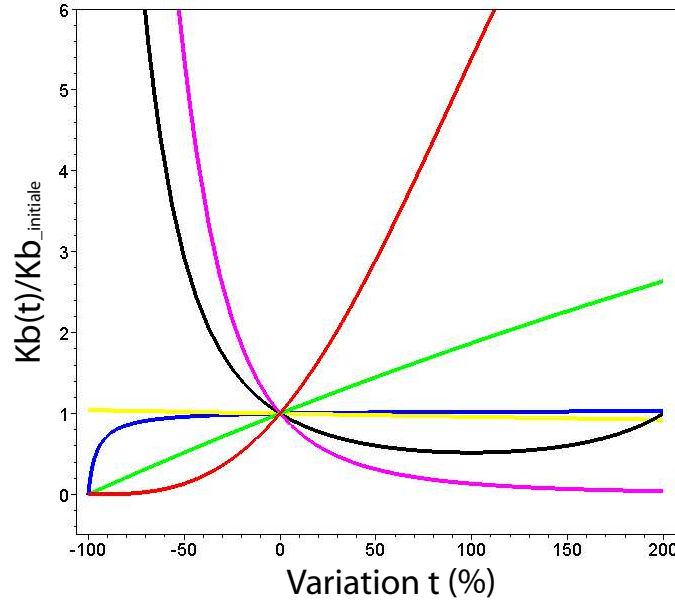


FIG. 4.17 – Influence des paramètres sur K_b

On observe que $K_b(\lambda)$ est minimum lorsque λ augmente de 100%, c'est-à-dire lorsque $\lambda = \pi/2$. Ceci peut se comprendre à partir de l'expression symbolique de K_b . En effet le dénominateur de K_b sera maximum lorsque $\lambda = \pi/2$. La baisse de $K_b(\lambda = \pi/2)$ est de 48%.

De même on peut comprendre, à partir de l'expression symbolique de K_b , qu'une baisse de λ va diminuer son dénominateur, et donc accroître K_b (ce qui n'était pas le cas pour K_a). Ici, lorsque λ diminue de 100% (i.e. $\lambda = 0$), alors K_b est maximum et est multipliée par 28 par rapport à sa valeur initiale (Fig. 4.18).

Ceci s'explique : si $\lambda = 0$ alors la liaison L_2 n'est plus sollicitée par l'effort transmis par la jambe (Fig. 4.19).

On observe le même phénomène lorsque $L_f = 0$. Cependant, l'explication physique n'est pas la même. Lorsque $L_f = 0$, les raideurs des liaisons élastiques L_2 , L_3 , L_4 et L_5 (qui modélisent la flexion et la torsion du pied) tendent vers l'infini et sont donc en quelque sorte *rigidifiées*. Par conséquent le pied devient plus rigide.

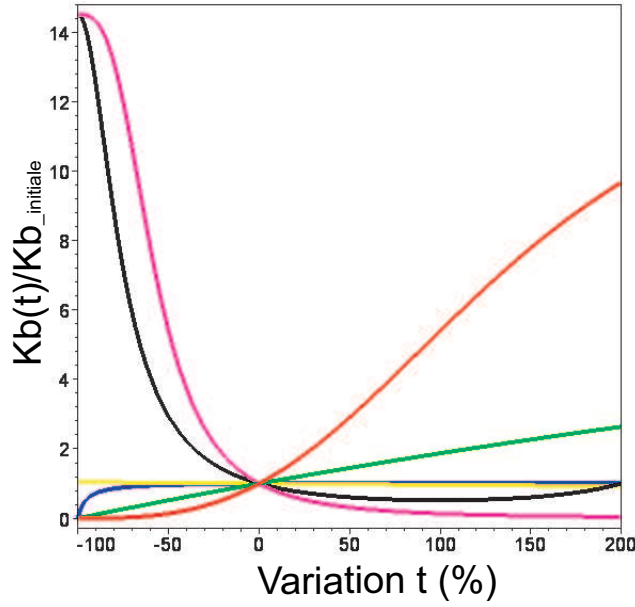


FIG. 4.18 – K_b est maximum lorsque $\lambda = 0$

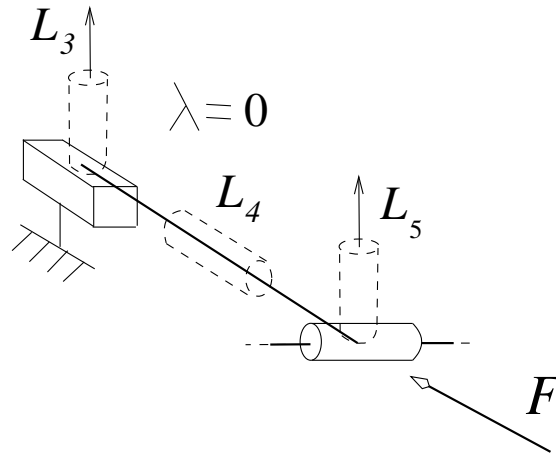


FIG. 4.19 – L_2 n'est pas sollicitée lorsque $\lambda = 0$

On constate aussi qu'une augmentation de h_f (rouge) accroît K_b davantage qu'une augmentation de b_f (vert). Ceci peut se comprendre en observant l'expression symbolique de K_b .

On a en effet :

$$K_b(h_f, b_f) = \frac{1}{0.00002537698413 + \frac{96.42857143}{h_f^3 b_f}}$$

Une augmentation de 10% h_f va donc diminuer plus rapidement le dénominateur de K_b qu'une augmentation de 10% de b_f .

Enfin on constate que si S_B , h_f ou b_f tendent vers 0, alors K_b tend également vers 0. Ceci peut s'observer à partir de l'expression symbolique de K_b , mais correspond à une réalité physique comme nous l'avons expliqué lors de l'analyse de K_a .

Les paramètres les plus importants pour K_b sont λ , L_f et h_f . λ et L_f ont une influence semblable, lorsqu'ils diminuent, K_b augmente, et réciproquement. h_f a une influence contraire, lorsqu'il augmente, K_b augmente, et réciproquement. On a :

$$K_b(\lambda) = \frac{0.566931456 \times 10^3}{0.4031870106 - 0.3888 \cos^2 \lambda}$$

$$K_b(L_f) = \frac{0.566931456 \times 10^{10}}{0.1438701056 \times 10^6 + 0.576 L_f^3}$$

$$K_b(h_f) = \frac{0.32256 \times 10^5}{0.81856 + \frac{0.1944 \times 10^6}{h_f^3}}$$

• Conclusions

L'analyse de K_a et K_b met en évidence les paramètres les plus influents pour la rigidité, et la façon dont ils influent sur la rigidité. Ces résultats peuvent servir à améliorer la conception de l'Orthoglide pour accroître la rigidité, en modifiant un ou plusieurs des paramètres pour accroître K_a ou K_b . Mais il faut examiner les conséquences de ces modifications en prenant en compte les contraintes technologiques du prototype déjà construit.

Si pour augmenter K_b , on annule λ ou L_f , alors le porte-à-faux de la liaison cinématique L_6 par rapport à l'axe de L_1 disparaît (Fig. 4.20). Or ce porte-à-faux est destiné à éviter les collisions entre le parallélogramme et la liaison prismatique actionnée lorsque l'on parcourt l'EDR cubique dans lequel on a choisi de travailler (Fig. 4.11). Il n'est donc pas possible d'annuler L_f ou λ .

Une solution technologique existe pour éviter le porte-à-faux : réaliser la liaison prismatique avec un vérin. Ainsi on évite les collisions entre le parallélogramme et la liaison prismatique. Cependant, outre le problème d'encombrement axial du vérin, la tige en position sortie nécessitera d'être largement dimensionnée pour résister aux sollicitations en flexion, ce qui nuira aux performances dynamiques.

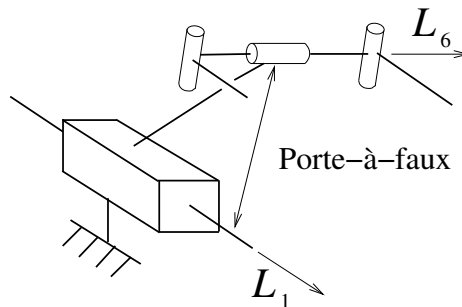


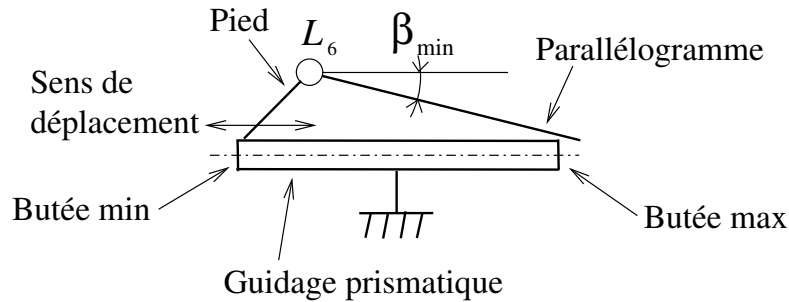
FIG. 4.20 – Porte-à-faux de L_6 par rapport à L_1

Et si pour accroître la raideur torsionnelle K_a on augmente λ jusqu'à $\pi/2$, il faut que l'EDR cubique reste atteignable sans collisions entre le parallélogramme et le guidage prismatique.

Une condition traduit cela : lorsque le guidage prismatique est en butée minimum, il faut que l'angle entre le parallélogramme et l'axe du guidage prismatique puisse atteindre une valeur β_{min} qui garantit que l'EDR cubique peut être parcouru sans que le parallélogramme n'entre en collision avec le guidage. La Fig. 4.21 représente le prototype de l'Orthoglide ainsi qu'un schéma du guidage prismatique en butée minimum vu de profil.



(a) Prototype



(b) Guidage vu de profil en butée minimum

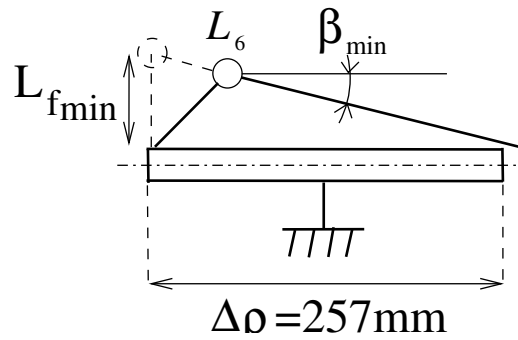
FIG. 4.21 – Condition géométrique à satisfaire pour parcourir l'EDR cubique

λ valant $\pi/2$ et les autres paramètres n'étant pas modifiés, il faut vérifier que la longueur initiale du pied est supérieure à la longueur minimum requise pour lui, notée L_{fmin} , longueur qui satisfait la condition géométrique de non-collision décrite sur la Fig. 4.21. La Fig. 4.22 montre comment calculer L_{fmin} lorsque $\lambda = \pi/2$:

$$L_{fmin} = \Delta\rho |\tan(\beta_{min})|$$

$\Delta\rho$ est la course articulaire. Dans notre cas, on a $\beta_{min} = -0.31$ rad (-18 degrés), $\Delta\rho = 257$ mm, donc $L_{fmin} = 83$ mm. La valeur initiale de L_f est 150mm, donc il n'y a pas de collisions lorsque $\lambda = \pi/2$.

Par contre si $\lambda = \pi/2$, alors K_b diminue de 48%. Il faut donc modifier un autre paramètre géométrique pour compenser cette diminution. Le problème qui se pose ici est en fait un

FIG. 4.22 – Calcul de L_{fmin}

problème d'optimisation multicritères dont les fonctions objectifs sont la maximisation de K_a et K_b . Intuitivement, un bon choix serait de diminuer la longueur du pied, ou d'augmenter la section $h_f b_f$. Une autre solution technologique particulière est également envisageable pour augmenter K_b : l'utilisation de deux liaisons actionnées prismatiques redondantes pour réaliser le mouvement en translation du pied de chaque jambe (Fig. 4.23).

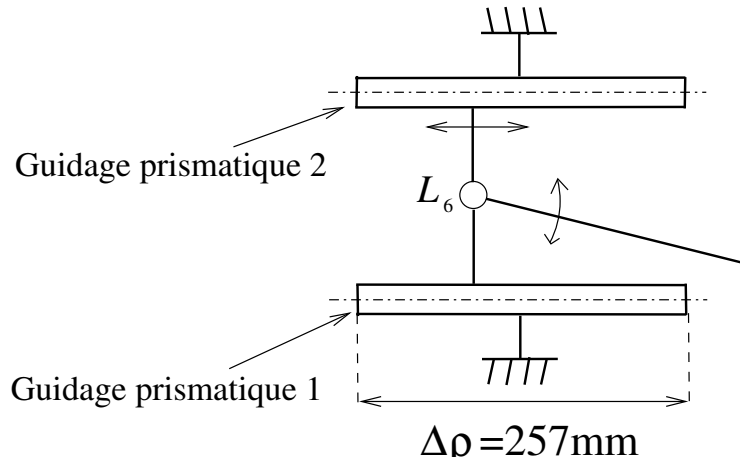


FIG. 4.23 – Utilisation de deux actionneurs prismatiques par jambe

Cette solution permet de rigidifier le pied. D'une part en modifiant sa géométrie : on a $\lambda = \pi/2$ et les liaisons L_3 et L_5 ne sont plus sollicitées. D'autre part en changeant les conditions limites appliquées sur le pied. En effet, le modèle poutre du pied devient celui d'une poutre encastree à ses deux extrémités. Le modèle flexible du pied que l'on obtiendrait alors est représenté sur la Fig. 4.24.

Les nouvelles conditions limite conduisent à des raideurs k_2 et k_4 plus élevées : on obtient $k_2 = \frac{24EI_{f1}}{L_f}$ soit une multiplication par 8, et $k_4 = \frac{2GI_{fO}}{L_f}$, soit une multiplication par 2. Les raideurs k_3 et k_5 ne sont plus sollicitées donc elles disparaissent du modèle flexible.

Les inconvénients de cette solution technologique à deux actionneurs en parallèle sont bien sûr l'augmentation de l'encombrement des axes et surtout l'augmentation du prix (2 fois plus d'axes prismatiques actionnés) notamment si l'on utilise des moteurs linéaires qui sont très

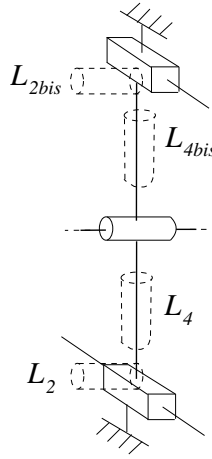


FIG. 4.24 – Nouveau modèle flexible pour le pied

chers. Dans le cas du prototype de l'Orthoglide à moteurs rotatifs et vis-à-billes, le choix de cette solution augmenterait le prix de 30%, sans compter la consolidation du bâti.

Si l'on souhaitait maximiser K_a et K_b simultanément, on pourrait par exemple maximiser une somme pondérée de ces deux quantités, ce qui serait dangereux car l'une des quantités pourrait augmenter beaucoup plus que l'autre. On pourrait alors chercher à maximiser seulement K_a (resp. K_b) en s'assurant que K_b (resp. K_a) reste supérieure à un seuil donné, ou encore chercher les paramètres qui feraient que K_a et K_b soient toutes les deux supérieures à un seuil donné.

4.6.1.4 Couplage raideur/dynamique

Si l'on souhaite accroître la rigidité sans modifier l'angle λ tout en évitant les collisions entre le guidage et le parallélogramme, on ne peut pas diminuer L_f . Une possibilité est d'augmenter h_f ou b_f , ou les deux. Accroître h_f ou b_f augmente la masse du pied. Dans [Guegan 03], un modèle dynamique de l'Orthoglide est proposé. D'après ce modèle, la variation $\Delta\Gamma$ de l'effort moteur nécessaire pour maintenir les performances dynamiques lorsque la masse du pied augmente, est égale au produit de l'accélération désirée \ddot{q} par la variation de la masse du pied Δm_f :

$$\Delta\Gamma = \ddot{q}\Delta m_f$$

Avec :

$$m_f = \rho_{alu}L_f h_f b_f$$

Où ρ_{alu} est la masse volumique de l'aluminium : $\rho_{alu} = 2.7 \text{ kg.mm}^{-3}$. Pour le prototype de l'Orthoglide, on a $\Gamma_{init} = 400\text{N}$ lorsque $\ddot{q} = 20\text{m.s}^{-1}$. Γ va varier en fonction de h_f ou de b_f , qui sont les seuls paramètres que l'on peut modifier :

$$\Gamma(h_f) = \Gamma_{init} + \ddot{q}\rho_{alu}L_f b_f \Delta h_f$$

$$\Gamma(b_f) = \Gamma_{init} + \ddot{q}\rho_{alu}L_f h_f \Delta b_f$$

Δh_f (resp. Δb_f) étant la variation en mm du paramètre h_f (resp. b_f). On a représenté sur la Fig. 4.25 en trait continu les variations de $\frac{K_a(h_f)}{K_{a_{init}}}$ (en rouge) et $\frac{K_a(b_f)}{K_{a_{init}}}$ (en vert), en pointillés les variations de $\frac{K_b(h_f)}{K_{b_{init}}}$ (en rouge) et $\frac{K_b(b_f)}{K_{b_{init}}}$ (en vert), en trait mixte les variations de $\frac{\Gamma(h_f)}{\Gamma_{init}}$ (en rouge), $\frac{\Gamma(b_f)}{\Gamma_{init}}$ (en vert). Ainsi on peut observer facilement la façon dont la variation d'un même paramètre influence différemment les variations des raideurs K_a et K_b et de l'effort moteur Γ .

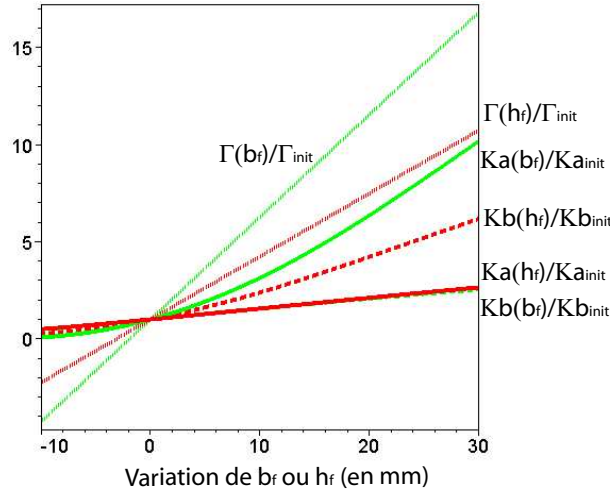


FIG. 4.25 – Variations de K_a , K_b et Γ lorsque h_f ou b_f varient

On voit que pour une augmentation de 10 mm de h_f ou b_f , l'effort moteur Γ augmente plus rapidement si b_f augmente (vert) que si h_f augmente (rouge), de même pour K_a (trait continu) et inversement pour K_b (pointillés). $\frac{K_b(b_f)}{K_{b_{init}}}$ est confondu avec $\frac{K_a(h_f)}{K_{a_{init}}}$.

Si l'on veut augmenter prioritairement K_a , alors il faut augmenter b_f , en contrepartie l'effort moteur augmentera rapidement. Si l'on veut augmenter prioritairement K_b , il faut augmenter h_f , l'effort moteur augmentera moins rapidement. La prise en compte de l'effort moteur impose des contraintes supplémentaires à l'optimisation des paramètres pour accroître la rigidité.

Nous venons d'illustrer un autre intérêt d'obtenir les expressions symboliques des éléments de la matrice de raideur : elles permettent d'optimiser les paramètres géométriques pour accroître la rigidité statique tout en prenant en compte les conséquences sur les performances dynamiques.

Une utilisation très intéressante de la matrice de complaisance sous forme symbolique serait l'analyse paramétrique de rigidité des LTPM isotropes présentés dans le paragraphe 2.2.3.3. En effet, ces mécanismes sont tels que $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W} = \mathcal{W}_{DR}/\mathcal{V} = 1$ (voir définition du volume d'une PKM dans le paragraphe 3.7) donc ce sont d'excellents candidats pour une application à l'usinage 3 axes, d'après les indices présentés dans le chapitre 3. Mais comme expliqué dans le paragraphe 2.2.4.4, on pressent que l'effet de la flexion peut nuire à la précision si on ne renforce pas les jambes, or renforcer les jambes peut nuire aux performances dynamiques. Construire un modèle dynamique des LTPM isotropes permettrait d'obtenir des résultats plus concrets et

observer la validité de cette intuition, pour ensuite rechercher quels paramètres géométriques seraient les plus pertinents à modifier afin d'améliorer la rigidité tout en limitant l'impact sur les performances dynamiques.

Lorsque l'on est en un point quelconque de l'espace de travail, la matrice de complaisance n'est pas diagonale et comme on l'a écrit dans le paragraphe 4.5, il n'est alors pas judicieux de chercher à travailler à partir des éléments de la matrice de raideur. Néanmoins, il est possible si on le souhaite de représenter en un point quelconque de l'espace Cartésien les variations des éléments de la matrice de complaisance lorsque les paramètres varient, et chercher comment ces paramètres doivent être optimisés pour diminuer la complaisance sans trop augmenter l'effort moteur nécessaire.

4.6.2 Dans l'espace de travail dextre régulier

4.6.2.1 Choix d'une zone de contrôle

Les éléments κ_{ij} de la matrice de complaisance κ varient selon la position Cartésienne. Pour mener une analyse paramétrique globale, il faudrait analyser chaque κ_{ij} dans tout l'EDR. La matrice de complaisance κ étant symétrique et de dimensions 6x6, cela impliquerait d'analyser 21 éléments κ_{ij} dans tout l'EDR.

Plutôt que de représenter graphiquement l'influence des paramètres géométriques sur les κ_{ij} dans tout l'EDR, on peut choisir une zone géométrique de contrôle qui sera considérée comme représentative des variations des κ_{ij} . Cette zone de contrôle peut être un point, un segment, un plan. L'idée est de simplifier l'analyse globale des κ_{ij} .

Une telle zone de contrôle devrait inclure des points en lesquels les κ_{ij} sont extremums. Ceci implique d'observer 21 éléments κ_{ij} dans tout l'EDR, de définir pour chacun une zone de contrôle, puis d'en choisir une seule, qui convienne à tous les κ_{ij} . Il est donc difficile, et fastidieux, de trouver une zone de contrôle représentative des variations des κ_{ij} . Nous traiterons un exemple d'analyse globale d'un des κ_{ij} dans le paragraphe 4.6.3.

Dans [Chablat 03], l'axe Q_1Q_2 est identifié comme l'axe représentatif de la variation des FAV dans l'EDR cubique (Fig. 4.11). Le long de l'axe (Q_1Q_2) on a $x = y = z$. Q_1 et Q_2 sont les points critiques de l'EDR, car si les FAV sont vérifiés en Q_1 et Q_2 alors ils le sont dans tout le cube [Chablat 04]. L'axe (Q_1Q_2) possède donc des propriétés intéressantes. Il traverse l'EDR et donne en général une idée juste des performances cinétostatiques de l'Orthoglide. C'est pourquoi nous le choisissons comme zone de contrôle le long de laquelle on va observer chaque κ_{ij} en fonction de z et des paramètres.

4.6.2.2 Observation des κ_{ij} le long de l'axe (Q_1Q_2)

Dans ce paragraphe, on va observer les variations des κ_{ij} le long de l'axe (Q_1Q_2) et analyser l'influence des paramètres géométriques sur les κ_{ij} aux points Q_1 et Q_2 . Pour étudier l'influence de chaque paramètre on fera varier le rapport $\frac{\kappa_{ij}(t)}{\kappa_{ij\text{initial}}}$, comme dans le paragraphe 4.6.1, t étant le pourcentage de variation du paramètre dont on observe l'influence.

La légende des couleurs et les valeurs initiales des paramètres sont données dans le Tab. 4.8. Attention, les κ_{ij} sont des éléments de complaisance donc l'influence des paramètres géométriques sera opposée à celle observée pour K_a et K_b à l'isotropie. Nous allons relever les détails marquants de chaque courbe $\frac{\kappa_{ij}(t)}{\kappa_{ij\text{initial}}}$, lorsque par rapport à leur valeur initiale les paramètres varient de -100% à $+200\%$.

Paramètre	Couleur	Valeur initiale
L_f	Rose	150mm
h_f	Rouge	26mm
b_f	Vert	16mm
λ	Noir	$\frac{\pi}{4}$ rad
S_B	Bleu foncé	144mm ²
d	Bleu clair	80mm
L_B	Jaune	310mm
e	Violet	80mm

TAB. 4.8 – Couleur et valeur initiale des paramètres variables

Le long de l'axe (Q_1Q_2) on a $x = y = z$, ce qui simplifie les expressions symboliques des κ_{ij} . Néanmoins ces expressions restent impossibles à observer telles quelles. On pourrait donc les décomposer en cascade.

Lorsque $x = y = z$, plusieurs éléments de la matrice de complaisance sont égaux :

$$\boldsymbol{\kappa} = \begin{pmatrix} \kappa_{33} & 0 & 0 & \kappa_{14} & \kappa_{15} & \kappa_{16} \\ 0 & \kappa_{33} & 0 & \kappa_{16} & \kappa_{14} & \kappa_{15} \\ 0 & 0 & \kappa_{33} & \kappa_{15} & \kappa_{16} & \kappa_{14} \\ \kappa_{14} & \kappa_{16} & \kappa_{15} & \kappa_{44} & \kappa_{45} & \kappa_{45} \\ \kappa_{15} & \kappa_{14} & \kappa_{16} & \kappa_{45} & \kappa_{44} & \kappa_{45} \\ \kappa_{16} & \kappa_{15} & \kappa_{14} & \kappa_{45} & \kappa_{45} & \kappa_{44} \end{pmatrix}$$

Seuls 6 éléments de $\boldsymbol{\kappa}$ sont non égaux entre eux : κ_{33} , κ_{44} , κ_{14} , κ_{15} , κ_{16} , κ_{45} . Nous allons les analyser un par un.

• Élément κ_{33}

κ_{33} est la complaisance torsionnelle dont l'unité est le $\text{rad.}(\text{Nmm})^{-1}$. Sur la courbe de gauche de la Fig. 4.26, on observe la variation de κ_{33} le long de (Q_1Q_2) : elle est faible, κ_{33} reste à peu près constant. On va observer l'influence des paramètres sur κ_{33} par exemple en Q_2 . On a constaté que le choix du point de (Q_1Q_2) en lequel on fait varier les paramètres de κ_{33} a peu d'influence. Ce que l'on observe en Q_2 est donc valable tout le long de l'axe (Q_1Q_2) .

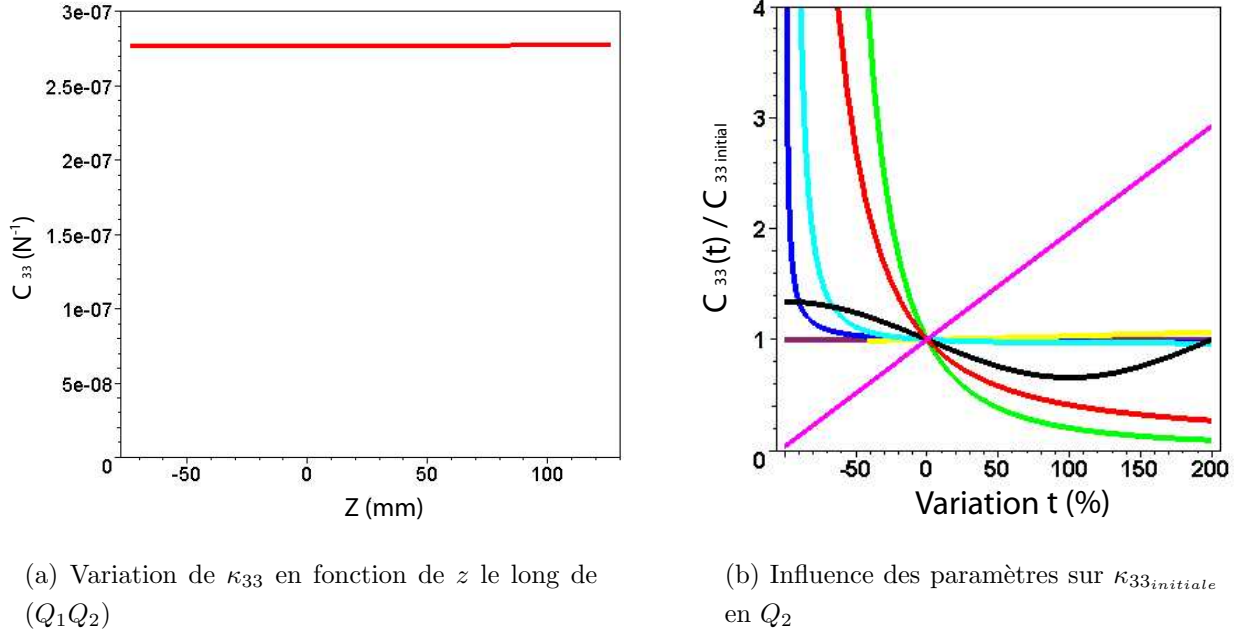


FIG. 4.26 – Variation de κ_{33} le long de (Q_1Q_2) et influence des paramètres

Sur le graphique de droite, on observe qu'augmenter b_f (vert) ou h_f (rouge) diminue κ_{33} , conformément à l'intuition. La diminution est plus rapide si c'est b_f qui augmente. Le paramètre e (violet) n'a quasiment pas d'influence, tout comme les paramètres d (bleu clair), L_B (jaune) et S_B (bleu foncé). κ_{33} tend vers $+\infty$ lorsque S_B ou d tendent vers 0.

On observe un minimum lorsque λ (noir) augmente de 100%, c'est-à-dire lorsque $\lambda = \frac{\pi}{2}$. Dans le paragraphe 4.6.1, on avait observé de même que la raideur torsionnelle K_a possédait un maximum lorsque $\lambda = \frac{\pi}{2}$.

Enfin, κ_{33} augmente avec L_f conformément à l'intuition.

• Élément κ_{44}

κ_{44} est la complaisance translationnelle dont l'unité est mm.N^{-1} . Le long de (Q_1Q_2) , κ_{44} n'est pas symétrique par rapport à l'isotropie et possède un minimum en $z = 18\text{mm}$ (Fig. 4.27). Si l'on recherche la rigidité, il est donc préférable de travailler aux alentours de $x = y = z = 18\text{mm}$. La valeur maximum de κ_{44} est atteinte en Q_2 .

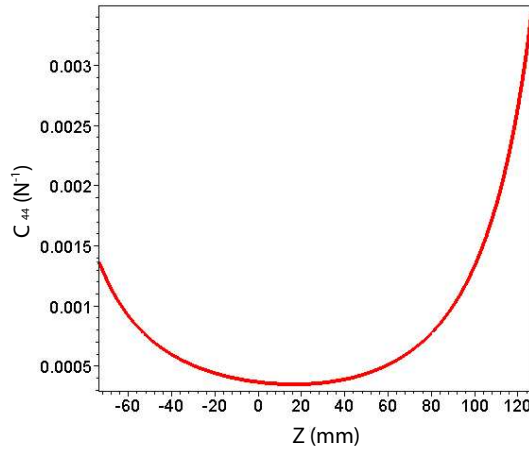


FIG. 4.27 – Variation de κ_{44} en fonction de z le long de Q_1Q_2

Sur la Fig. 4.28, on se place en deux points, Q_1 (graphique de gauche) et Q_2 (graphique de droite). En chaque point, on fait varier les paramètres géométriques afin d'observer leur influence sur κ_{44} . L'intérêt est de comparer l'influence d'un même paramètre en Q_1 et en Q_2 .

On constate par exemple au premier coup d'oeil qu'augmenter e (violet) en Q_2 a beaucoup plus d'influence qu'en Q_1 .

On observe aussi que réduire L_B de 21% en Q_1 ou de 29% en Q_2 fait tendre κ_{44} vers $+\infty$. L'explication de ce phénomène est que lorsque L_B diminue, le lieu des singularités parallèles se rapproche du point de l'espace Cartésien en lequel on se trouve pour observer κ_{44} (ici le point Q_1 ou Q_2). Lorsque L_B atteint une certaine valeur, le point Q_1 ou Q_2 devient une configuration singulière et la rigidité est perdue, ce qui explique que κ_{44} tende vers $+\infty$. On constatera ce phénomène pour d'autres κ_{ij} .

Selon le point de (Q_1Q_2) où l'on se trouve, les racines carrées des termes P_1 , P_2 , P_3 , P_{12} , P_{13} et P_{23} imposent une valeur minimum à L_B , ce qui explique que les courbes jaunes soient tronquées. On constatera également ce phénomène pour d'autres κ_{ij} .

Il faut noter que κ_{44} diminue lorsque L_B augmente, aussi bien en Q_1 qu'en Q_2 . Cela signifie que la rigidité de l'Orthoglide augmente avec L_B . Or l'intuition incite à penser le contraire, à savoir que plus les membrures sont longues, plus faible est la rigidité. Ce n'est pas le cas ici et il faut le remarquer. Par contre c'était le cas à l'isotropie, on a constaté en effet lors de l'étude de K_b que si L_B augmentait alors la rigidité diminuait. Mais ce phénomène était peu perceptible car à l'isotropie l'influence de L_B est faible par rapport aux autres paramètres. On constatera ce phénomène non-intuitif pour d'autres κ_{ij} .

κ_{44} est maximum lorsque λ (noir) augmente de 135% en Q_2 , et de 66% en Q_1 .

Lorsque L_f (rose) augmente, κ_{44} augmente ce qui est en accord avec l'intuition.

Par ailleurs, h_f a moins d'influence que b_f en Q_2 et plus d'influence en Q_1 .

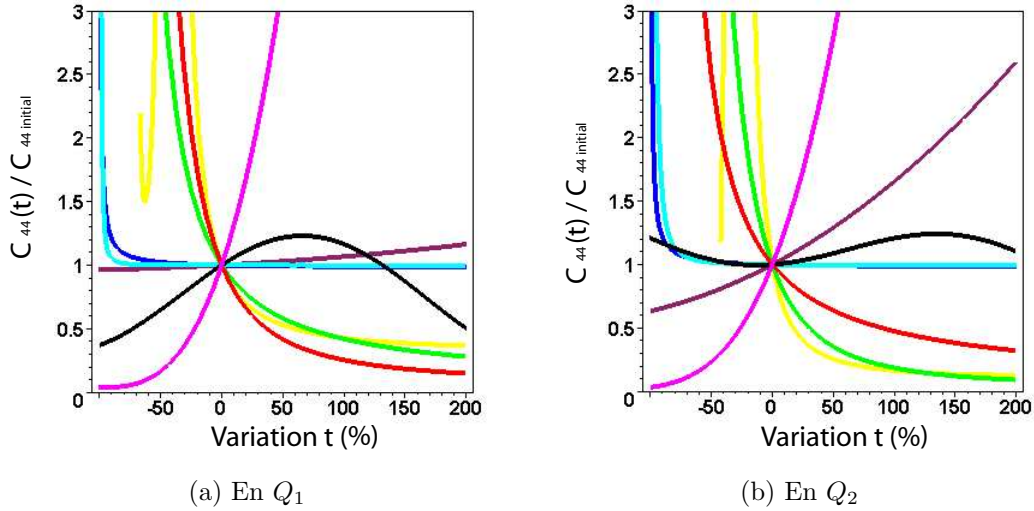


FIG. 4.28 – Variations de $\kappa_{44}(t)/\kappa_{44\text{initiale}}$

• Élément κ_{14}

κ_{14} est un élément de couplage dont l'unité est le N^{-1} . κ_{14} transforme des Newtons en radians ou des N.mm en mm. En effet, de même que κ_{15} et κ_{16} , κ_{14} relie les forces (resp. couples) extérieures aux rotations (resp. translations) compliantes de l'outil ou plate-forme mobile. On observe κ_{14} le long de l'axe (Q_1Q_2) en fonction de Z sur la Fig. 4.29. κ_{14} vaut 0 à l'isotropie lorsque $z = 0$.

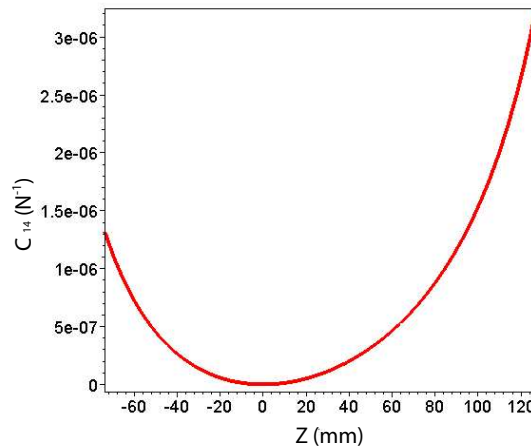


FIG. 4.29 – Variation de κ_{14} en fonction de z le long de (Q_1Q_2)

Sur la Fig. 4.30, on peut observer l'influence des paramètres géométriques sur κ_{14} , en Q_1 (graphique de gauche) et en Q_2 (graphique de droite).

On remarque que lorsque $\lambda = 0$, alors κ_{14} atteint un maximum.

D'autre part si L_B augmente, κ_{14} diminue ce qui est contraire à l'intuition. C'est le phénomène que l'on avait constaté pour κ_{44} .

Si on réduit L_B de 21% en Q_1 ou de 44% en Q_2 , κ_{14} tend vers $+\infty$. L'explication est la même que celle donnée pour κ_{44} : Q_1 (resp. Q_2) deviennent des configurations singulières lorsque L_B diminue de 21% en Q_1 (resp. de 44%).

Diminuer b_f ou h_f augmente κ_{14} , et inversement. Pour une même variation de b_f et de h_f , la variation de b_f a plus d'influence sur κ_{14} . Par exemple si b_f augmente de 10%, κ_{14} diminue davantage que si h_f augmente de 10%.

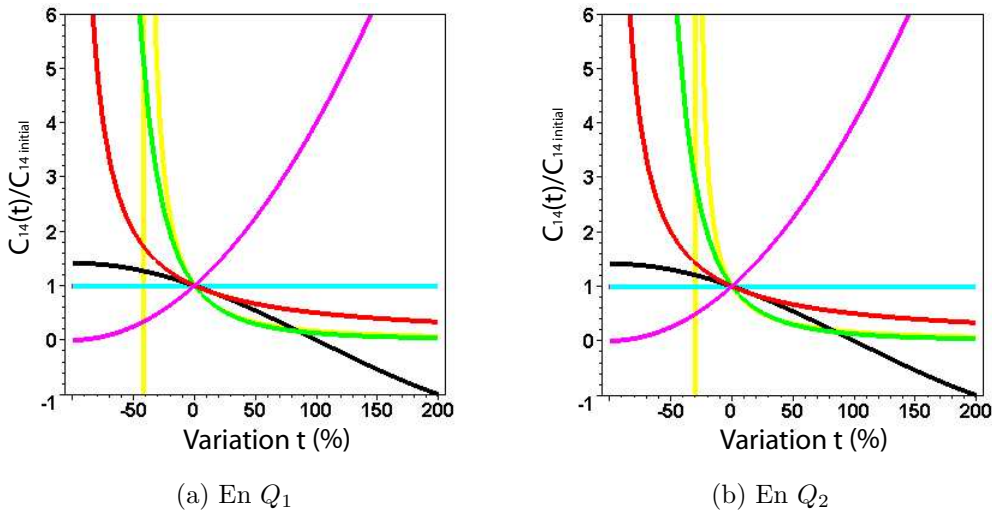


FIG. 4.30 – Variation de $\kappa_{14}(t)/\kappa_{14_{initiale}}$ en fonction des paramètres

• Élément κ_{15}

κ_{15} est, comme κ_{14} , un élément de couplage. On observe κ_{15} en fonction de z le long de l'axe Q_1Q_2 sur la Fig. 4.31. κ_{15} est négatif entre $Z = -74$ (en Q_1) et $Z = 0$, κ_{15} est minimum en $Z=-49$.

Sur la Fig. 4.32, on fait varier κ_{15} en fonction des paramètres géométriques, en Q_1 (à gauche) et en Q_2 (à droite).

Si on réduit L_B de 41% en Q_1 ou de 29% en Q_2 , alors κ_{15} tend vers l'infini et change de signe, passant de positif à négatif.

Une même variation de e a plus d'influence sur κ_{15} au point Q_1 qu'au point Q_2 .

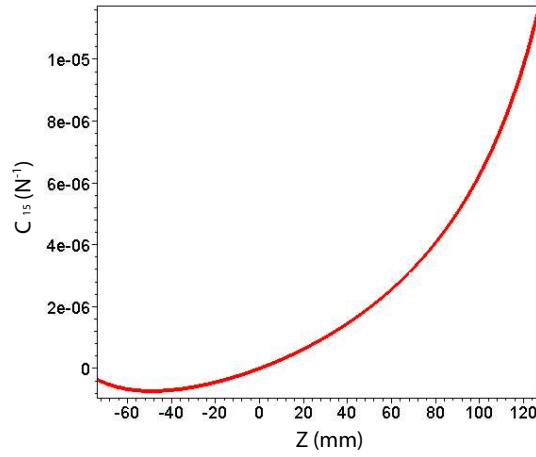


FIG. 4.31 – Variation de κ_{15} en fonction de z le long de (Q_1Q_2)

En Q_2 , κ_{15} est maximum lorsque $\lambda = 0$ et minimum lorsque λ augmente de 152%. Une augmentation de λ au-delà de $\frac{\pi}{2}$ n'est pas réaliste, par contre il faut retenir qu'augmenter λ diminue κ_{15} , donc augmente la rigidité.

L'influence des paramètres sur κ_{15} est assez intéressante en Q_1 . On observe que :

1. κ_{15} atteint un maximum lorsque L_B (resp. L_f) augmente de 54% (resp. 38%) ;
2. κ_{15} s'annule et devient positif (resp. négatif) lorsque L_B (resp. L_f) diminue de 9% (resp. augmente de 27%) ;
3. κ_{15} atteint un minimum lorsque λ diminue de 20% ;
4. κ_{15} atteint un maximum lorsque b_f diminue de 10%, s'annule et change de signe (devient négatif) lorsque b_f diminue de 43%.

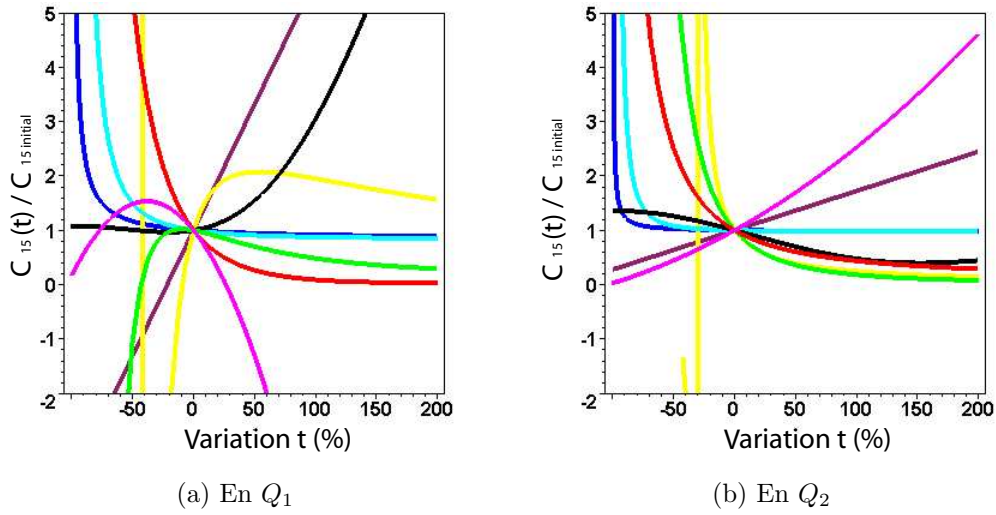
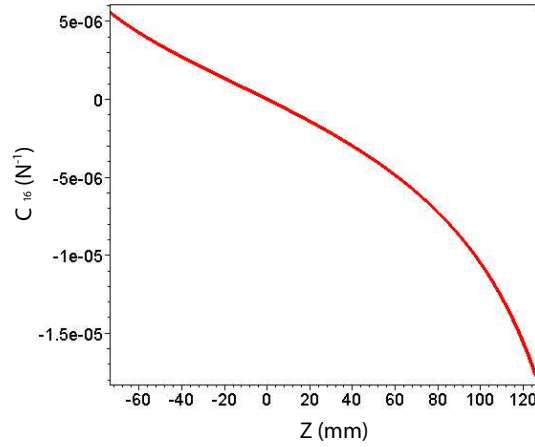
Interpréter ces observations est compliqué. Les changements de signe et les extremums locaux de κ_{15} sont dûs à l'influence des diverses liaisons élastiques. Pour trouver une explication, il faudrait analyser l'influence de chaque paramètre, c'est-à-dire faire varier indépendamment la longueur des barres L_{B_1} de la jambe 1, puis la longueur L_{B_2} des barres de la jambe 2, etc...

• Élément κ_{16}

On observe κ_{16} le long de l'axe Q_1Q_2 en fonction de z sur la Fig. 4.33. κ_{16} s'annule en $z = 0$, c'est-à-dire à l'isotropie. κ_{16} est positif lorsque $z < 0$, et négatif lorsque $z > 0$.

Sur la Fig. 4.34, on fait varier κ_{16} en fonction des paramètres géométriques, au point Q_1 (à gauche) puis au point Q_2 (à droite).

L'influence des différents paramètres est à peu près la même en Q_1 ou en Q_2 : augmenter L_B , b_f ou h_f diminue κ_{16} , donc accroît la rigidité. κ_{16} augmente avec e ou L_f . d et S_B ont peu d'influence.

FIG. 4.32 – Variation de $\kappa_{15}(t)/\kappa_{15_{initiale}}$ FIG. 4.33 – Variation de κ_{16} en fonction de z le long de $(Q_1 Q_2)$

Si L_B diminue de 29% en Q_2 (resp. de 42% en Q_1) alors κ_{16} tend vers $+\infty$ car Q_1 (resp. Q_2) devient une configuration singulière.

• Élément κ_{45}

κ_{45} est un élément de couplage qui relie par exemple la force extérieure dirigée selon l'axe x à la translation compliante de l'outil selon les directions y et z . La Fig. 4.35 représente l'évolution de κ_{45} le long de l'axe $Q_1 Q_2$ en fonction de Z . κ_{45} s'annule en $z = 0$, est positif lorsque $z < 0$, et négatif lorsque $z > 0$.

Sur la Fig. 4.36, on fait varier κ_{45} en fonction des paramètres géométriques, au point Q_1 (à gauche) et au point Q_2 (à droite).

On constate que κ_{45} diminue lorsque L_B , b_f ou h_f augmentent. h_f est plus influent que b_f

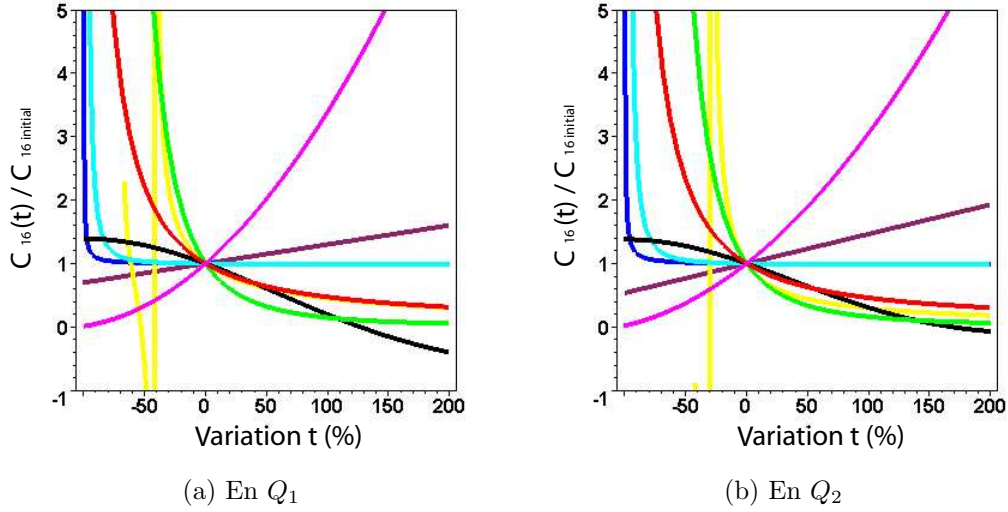


FIG. 4.34 – Variation de $\kappa_{16}(t)/\kappa_{16_{initiale}}$ en fonction des paramètres

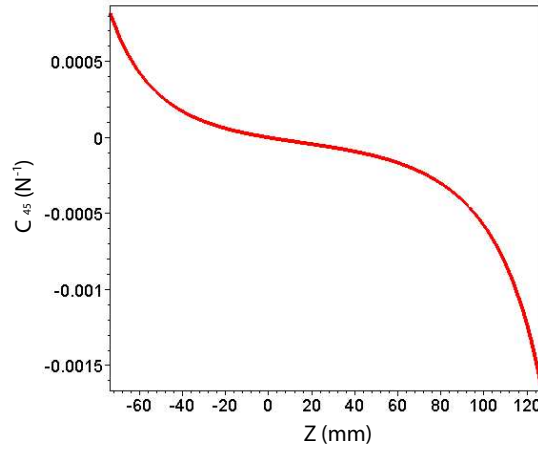


FIG. 4.35 – Variation de κ_{45} en fonction de z le long de (Q_1Q_2)

en Q_1 , tandis que b_f est plus influent que h_f en Q_2 .

En Q_1 (resp. Q_2), diminuer λ diminue (resp. augmente) κ_{45} , qui atteint un minimum (resp. un maximum) lorsque $\lambda = 0$. Un maximum est atteint en Q_1 si λ augmente de 70% et en Q_2 si λ augmente de 130%.

Une fois encore, on constate qu'augmenter L_B rigidifie la structure, car κ_{15} diminue avec L_B .

• Conclusions

Lorsque l'on se trouve en un point quelconque de l'EDR, les expressions symboliques des éléments κ_{ij} ne sont pas visualisables telles quelles. Néanmoins on peut les utiliser comme des fonctions multivariables afin d'observer et d'analyser l'influence de chaque paramètre sur

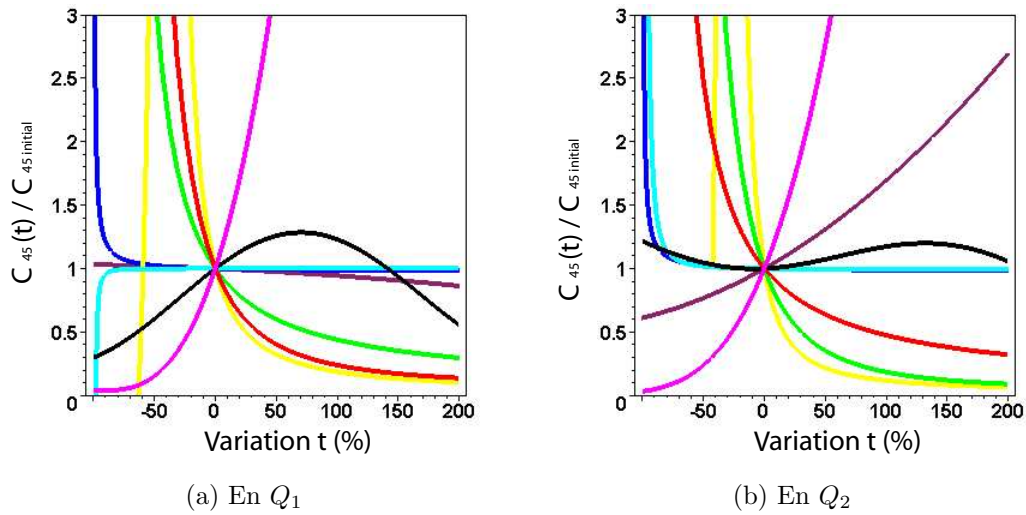


FIG. 4.36 – Variation de $\kappa_{45}(t)/\kappa_{45_{initiale}}$ en fonction des paramètres

la rigidité.

C'est ce que nous venons de faire. Nous avons mesuré et observé en Q_1 et en Q_2 l'influence des paramètres géométriques sur les κ_{ij} . Nous allons rassembler les résultats de cette analyse dans le Tab. 4.9 afin de dégager des tendances lisibles parmi les observations effectuées. La signification des symboles utilisés dans le tableau est :

- 0 : aucune influence par rapport aux autres paramètres ;
- +/- : influence faible sur l'augmentation/diminution de la rigidité ;
- ++/- - influence moyenne sur l'augmentation/diminution de la rigidité ;
- +++/- - - influence importante sur l'augmentation/diminution de la rigidité.

Paramètre	Influence	
	Diminution	Augmentation
L_f	+++	- - -
h_f	- - -	+++
b_f	- - -	+++
λ	- - / ++	- - / ++
d	-	0
L_B	- - -	++
S_B	-	0
e	++	- -

TAB. 4.9 – Tableau de synthèse sur l'influence des paramètres sur la rigidité

Il n'est pas possible de se prononcer sur l'influence de l'angle λ . On peut dire que cette influence est moyenne par rapport aux autres paramètres, mais avant tout variable suivant le

point de l'espace Cartésien et l'élément κ_{ij} considéré.

Le Tab. 4.9 donne une idée moyenne de l'impact de la variation de chaque paramètre en Q_1 , en Q_2 , à l'isotropie, c'est une façon concise de présenter les résultats de l'analyse paramétrique, même si certains détails n'apparaissent pas : par exemple, le Tab. 4.9 ne rend pas compte du fait que l'influence de L_f sur κ_{15} en Q_1 est surprenante.

Cependant, il est possible qu'en certains points de l'EDR l'influence des paramètres soit modifiée de façon non-négligeable. On a par exemple observé aux points Q_1 et Q_2 que la variation de κ_{ij} en fonction de L_B est contraire à l'intuition. Mais ce phénomène peut ne pas exister en d'autres points de l'EDR.

Il est donc important de mener une analyse paramétrique globale des κ_{ij} , en observant l'influence des paramètres géométriques en plusieurs points de la surface de l'EDR. Ainsi, les conclusions sur l'influence des paramètres géométriques seront meilleures.

Il serait possible de réaliser les courbes de ce paragraphe à partir de calculs numériques, mais il faudrait choisir à l'avance quelles courbes tracer. Or une des difficultés du problème est de mettre en évidence l'influence des paramètres au moyen de courbes sélectionnées. Pour cela, il est nécessaire de disposer d'outils flexibles permettant de faire varier facilement chaque paramètre, ce que permet le modèle symbolique que nous avons implémenté.

• Remarque :

Lors de la conception d'un Orthoglide, prescrire les coordonnées des points Q_1 et Q_2 , sommets de l'EDR cubique défini dans le paragraphe 4.4.2, permet de prescrire la taille de l'EDR, mais aussi de calculer la longueur L_B des barres du parallélogramme [Chablat 03]. Admettons que cette phase soit la première étape de la conception géométrique d'un Orthoglide, et qu'ensuite on effectue une analyse paramétrique de rigidité.

Si à la suite de cette analyse, semblable à celle que nous venons de mener, le concepteur décide d'augmenter L_B pour accroître la rigidité, alors il va modifier les dimensions de l'EDR cubique et la position des points Q_1 et Q_2 . Lorsque L_B varie, les dimensions de l'EDR cubique changent, les sommets Q_1 et Q_2 se déplacent le long de la droite $x = y = z$, ils s'éloignent l'un de l'autre si L_B augmente. À priori, augmenter L_B ne modifiera pas les résultats que nous avons observé pour les autres paramètres, par contre les dimensions prescrites pour l'EDR seront modifiées, les coordonnées des points Q_1 et Q_2 ne seront plus les mêmes, il ne faut pas perdre ce détail de vue. Dans l'espace Cartésien, les frontières de l'EDR, zone d'usinage saine, seront modifiées.

Une façon de concevoir un Orthoglide pourrait alors être :

1. Définition de la longueur L_B pour un EDR cubique prescrit [Chablat 03] ;
2. Optimisation des autres paramètres -sauf L_B - pour augmenter la rigidité en utilisant les expressions symboliques des éléments κ_{ij} .

4.6.3 Observation de κ_{44} dans tout l'EDR

Nous allons donc traiter dans ce paragraphe un exemple d'analyse paramétrique globale. On choisit d'observer l'élément κ_{44} de la matrice de complaisance. L'objectif est de se faire une idée la plus juste possible de l'influence des paramètres sur κ_{44} dans tout l'EDR.

Pour cela, il faut choisir un certain nombre de points qui sont représentatifs du volume global de l'EDR. Ensuite, à partir de l'observation en chaque point de l'influence des paramètres sur κ_{44} , on pourra conclure globalement. Ces points sont représentés sur la Fig. 4.37. Ils sont au nombre de 14. On a tracé une diagonale de la surface cubique à laquelle ils appartiennent pour plus de clarté. Ils sont régulièrement répartis sur l'EDR : ce sont les 8 sommets du cube et les 6 centres des faces.

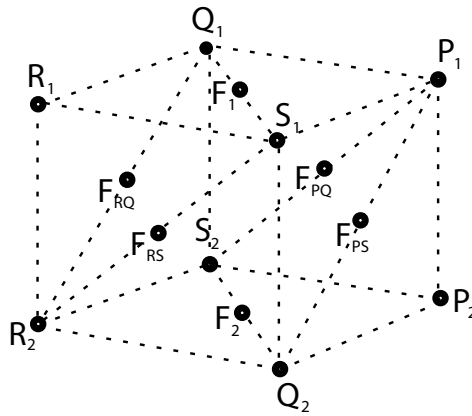
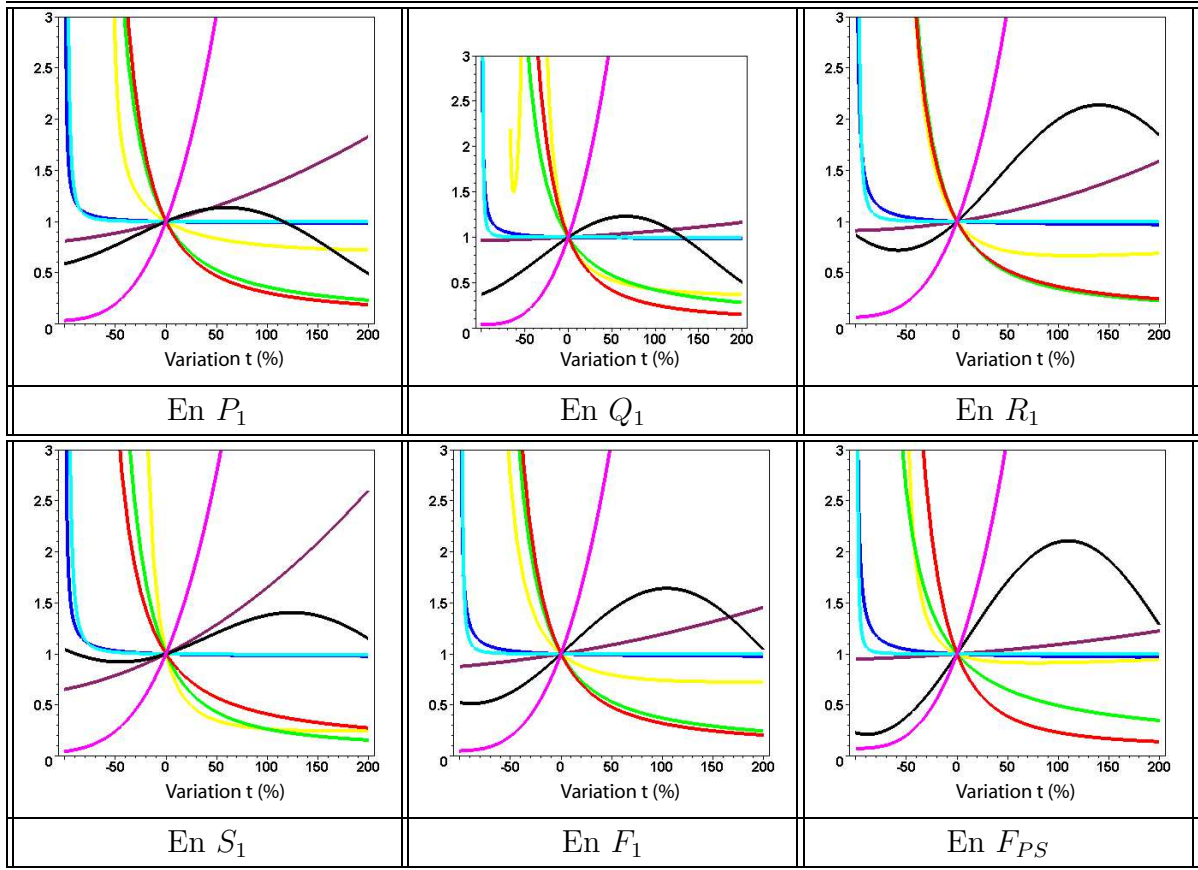


FIG. 4.37 – Points d'observation de κ_{44} pour une analyse paramétrique globale

Les courbes représentant les variations de $\kappa_{44}(t)/\kappa_{initiale}$ en fonction des pourcentages de variation des différents paramètres sont représentées dans le Tab. 4.10 et le Tab. 4.11. Attention, l'échelle du graphe au point F_{RS} n'est pas la même que l'échelle des autres graphes. L'intervalle de variation de $\kappa_{44}(t)/\kappa_{initiale}$ est $[0,4]$ et non $[0,3]$.

Il s'agit d'observer toutes les courbes et d'en tirer des conclusions globales sur l'influence des paramètres sur κ_{44} .

L'influence de certains paramètres varie peu avec la position Cartésienne. L'influence de L_f



TAB. 4.10 – Variation de $\kappa_{44}(t)/\kappa_{44_{initiale}}$ en fonction des paramètres : graphe 1

(rose), de S_B (bleu foncé) ou de d (bleu clair) par exemple, qui est conforme à ce que l'on avait observé le long de (Q_1Q_2) . Les expressions symboliques de $\kappa_{44}(L_f)$, $\kappa_{44}(S_B)$ et $\kappa_{44}(d)$ en un point quelconque de l'EDR sont assez simples et permettent de comprendre l'allure des courbes observées :

$$\kappa_{44}(L_f) = \alpha_3 L_f^3 + \alpha_2 L_f^2 + \alpha_1 L_f + \alpha_0$$

$$\kappa_{44}(S_B) = \frac{\alpha_1}{S_B} + \alpha_0$$

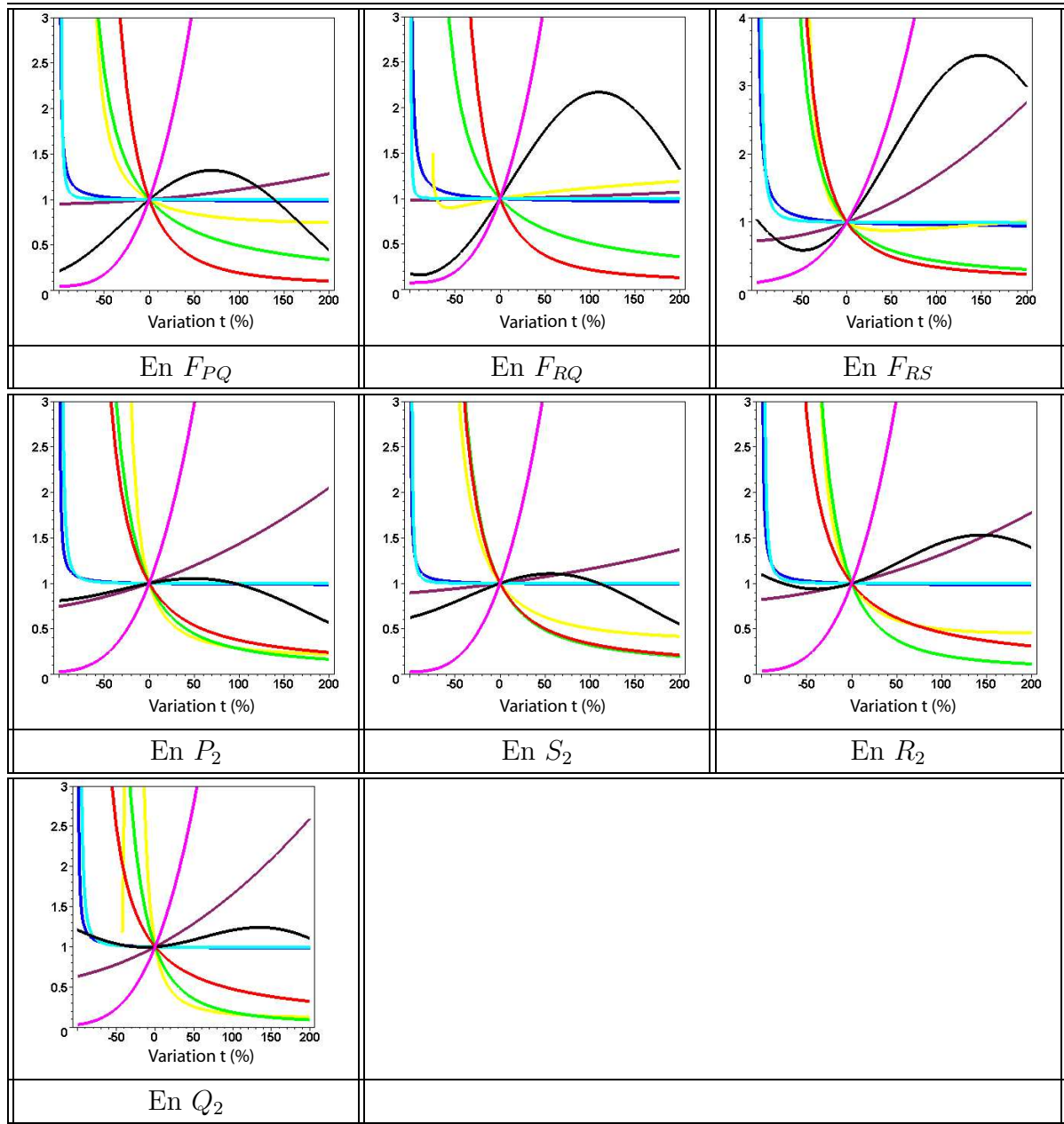
$$\kappa_{44}(d) = \frac{\alpha_1}{d^2} + \alpha_0$$

Les coefficients α_i sont des réels qui dépendent de la position Cartésienne.

L'influence de h_f (rouge) ou b_f (verte) change avec la position Cartésienne, mais la forme des courbes $\kappa_{44}(t)/\kappa_{initiale}$, lorsque h_f ou b_f varie, reste proche de ce que l'on avait observé le long de (Q_1Q_2) . Les expressions symboliques de $\kappa_{44}(h_f)$ et $\kappa_{44}(b_f)$ en un point quelconque de l'EDR sont également assez simples :

$$\kappa_{44}(h_f) = \frac{\alpha_7 h_f^7 + \alpha_6 h_f^6 + \alpha_5 h_f^5 + \alpha_4 h_f^4 + \alpha_3 h_f^3 + \alpha_2 h_f^2 + \alpha_0}{h_f^3 (b_{f_{initiale}}^2 + h_f^2)^2}$$

$$\kappa_{44}(b_f) = \frac{\alpha_7 b_f^7 + \alpha_6 b_f^6 + \alpha_5 b_f^5 + \alpha_4 b_f^4 + \alpha_3 b_f^3 + \alpha_2 b_f^2 + \alpha_0}{b_f^3 (h_{f_{initiale}}^2 + b_f^2)^2}$$



TAB. 4.11 – Variation de $\kappa_{44}(t)/\kappa_{44_{initiale}}$ en fonction des paramètres : graphe 2

La variation de l'influence de la longueur des barres L_B (jaune) est intéressante car la forme de la courbe $\kappa_{44}(t)/\kappa_{initiale}$ change de façon significative suivant la position Cartésienne. $\kappa_{44}(t)/\kappa_{initiale}$ possède un minimum aux points F_{PS} (pour une augmentation de L_B de 73%), R_1 (pour une augmentation de L_B de 112%), F_{RQ} (pour une diminution de L_B de 59%) et F_{RS} (pour une augmentation de L_B de 49.5%). On observe aussi au point F_{RQ} que κ_{44} augmente avec L_B alors que c'est le contraire en tous les autres points. Aux points F_{RS} et F_{PS} , il faut noter qu'augmenter L_B a peu d'influence sur $\kappa_{44}(t)/\kappa_{initiale}$ qui reste proche de 1. On observe le même phénomène dans une moindre mesure au point F_{RQ} lorsque κ_{44} augmente avec L_B . Les points en lesquels l'augmentation de L_B provoque la plus grande diminution de $\kappa_{44}(t)/\kappa_{initiale}$ sont S_1 et P_2 . L'expression symbolique de $\kappa_{44}(L_B)$ en un point quelconque peut être assez volumineuse donc nous ne la donnerons pas.

L'influence de e varie elle aussi suivant le point où l'on se trouve. Néanmoins, $\kappa_{44}(t)/\kappa_{initiale}$ augmente toujours avec e . L'expression symbolique de $\kappa_{44}(e)$ en un point quelconque est :

$$\kappa_{44}(e) = \alpha_2 e^2 + \alpha_1 e + \alpha_0$$

Les coefficients α_2 , α_1 et α_0 semblent être toujours positifs. $\kappa_{44}(t)/\kappa_{initiale}$ augmente jusqu'à 1.5 au maximum en F_{PS} , F_{PQ} , F_{RQ} , S_2 , R_1 et F_1 ; jusqu'à 2 en P_1 , R_2 et P_2 ; jusqu'à 2.6 en S_1 et jusqu'à 3 en F_{RS} . L'influence de e est très importante aux points S_1 et F_{RS} .

L'influence quantitative de λ varie beaucoup, mais pas son influence qualitative : $\kappa_{44}(t)/\kappa_{initiale}$ augmente avec λ quelle que soit la position Cartésienne. L'expression symbolique de $\kappa_{44}(\lambda)$ en un point quelconque est :

$$\kappa_{44}(\lambda) = \alpha_1 \cos^2(\lambda) + \alpha_2 \cos(\lambda) + \alpha_3 \cos(\lambda) \sin(\lambda) + \alpha_4$$

Ainsi, le pourcentage dont doit varier λ pour que $\kappa_{44}(t)/\kappa_{initiale}$ atteigne un maximum varie suivant le point où l'on se trouve entre 50% et 150%, et le maximum à atteindre entre 1.1 et 3.5.

Le Tab. 4.12 fait la synthèse des observations que nous venons de faire concernant l'influence des paramètres sur κ_{44} . Il n'est pas possible de conclure définitivement sur l'influence quantitative de e , de L_B et de λ mais le plus important est de déterminer si κ_{44} augmente ou diminue lorsque ces paramètres augmentent, ce que l'on a fait.

Paramètre	Influence	
	Diminution	Augmentation
L_f	- - -	+++
h_f	+++	- - -
b_f	+++	- - -
λ	-/- -	+ / ++
d	0	0
L_B	+++	0 / - -
S_B	0	0
e	-/- -	+ / ++

TAB. 4.12 – Influence des paramètres sur κ_{44}

Pour une analyse globale de la rigidité de l'Orthoglide, il faudrait analyser chaque κ_{ij} tel que nous venons de le faire.

Puis, il faudrait définir pour chacun une zone de contrôle (voir paragraphe 4.6.2.1), afin d'en choisir une seule qui convienne à peu près à tous les κ_{ij} , le but étant d'analyser les κ_{ij} de la même manière que dans le paragraphe 4.6.2.2 où l'on a travaillé le long de (Q_1Q_2) , afin de produire des résultats globaux pour un nombre limité de graphiques à observer.

4.7 Influence sur la rigidité de la variation simultanée de deux paramètres

Jusqu'à présent, nous avons observé l'influence sur la rigidité de la variation d'un seul paramètre à la fois. Les expressions symboliques des κ_{ij} permettent aussi d'observer l'influence de la variation simultanée de deux paramètres.

Imaginons par exemple que l'on souhaite augmenter le volume de l'espace de travail atteignable. Il faut pour cela éloigner le parallélogramme du guidage prismatique afin d'éviter les collisions. Il faut donc augmenter L_f la longueur du pied. Mais alors la rigidité va diminuer comme on l'a vu. Pour conserver les mêmes caractéristiques de rigidité, il faut modifier un autre paramètre géométrique, dont la variation ne doit pas affecter l'augmentation du volume de l'espace de travail atteignable obtenue en augmentant L_f .

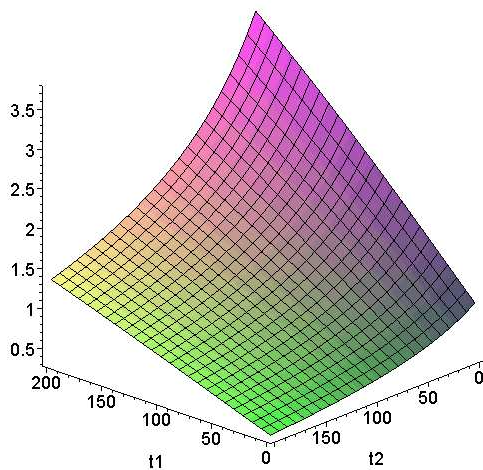
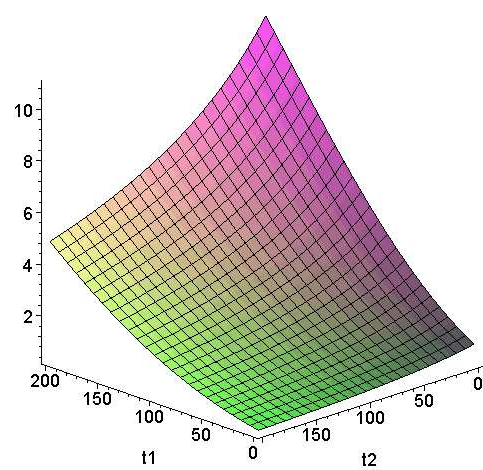
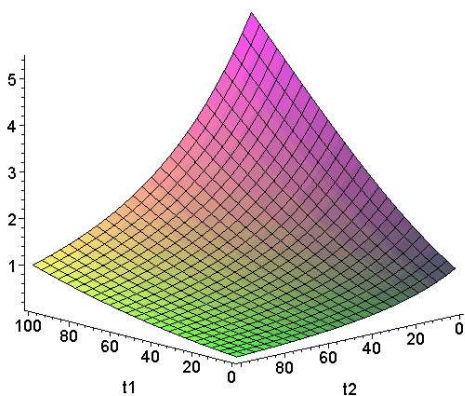
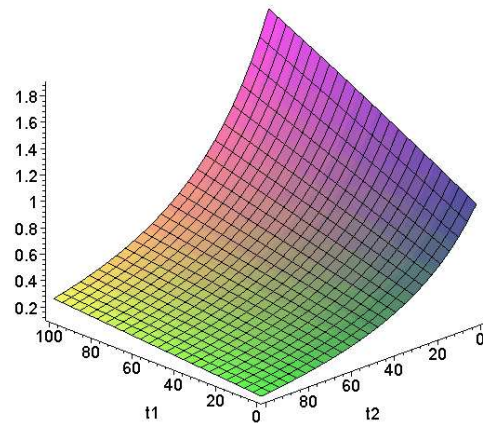
L'étude paramétrique que nous avons menée dans le paragraphe 4.6 nous permet d'identifier facilement quels paramètres pourraient aider à compenser la perte de rigidité due à une augmentation de L_f : les paramètres définissant la section du pied, h_f et b_f . En effet, ces deux paramètres ont une influence importante sur la rigidité (voir Tab. 4.9) et leur augmentation n'affectera pas le gain en volume atteignable obtenu en augmentant L_f . Le seul problème, qui a été abordé dans le paragraphe 4.6.1.4, sera celui de l'augmentation du poids du pied. Dans ce cas si l'on veut que les performances dynamique soient conservées, il faudra choisir des moteurs plus puissants.

On choisit par exemple d'observer les variations des raideurs torsionnelle K_a et translationnelle K_b à l'isotropie. Sur les Fig. 4.38 et 4.39, on a représenté les évolutions de $K_a/K_{a_{initiale}}$ et de $K_b/K_{b_{initiale}}$ lorsque t_1 , le pourcentage de variation de h_f (resp. b_f), et t_2 le pourcentage de variation de L_f , varient.

Sur la Fig. 4.38, on observe qu'augmenter h_f ou b_f permet de compenser sans aucun problème la diminution de K_a due à l'augmentation de L_f . Si par exemple on augmente L_f de 50%, il faut augmenter h_f de 34% ou b_f de 16% pour que K_a retrouve la valeur $K_{a_{initiale}}$.

Sur la Fig. 4.39, on observe de même qu'augmenter h_f ou b_f permet de compenser la diminution de K_b due à l'augmentation de L_f . Mais si par exemple on augmente L_f de 50%, il faut augmenter h_f de 48% ou b_f de 245% pour que K_b retrouve la valeur $K_{b_{initiale}}$.

Augmenter h_f pour compenser la perte de rigidité due à l'augmentation de L_f est donc plus judicieux qu'augmenter b_f , car le gain de poids du pied est moindre.

(a) $K_a(t_{h_f}, t_{L_f})/K_{a_{initiale}}$ (b) $K_a(t_{b_f}, t_{L_f})/K_{a_{initiale}}$ FIG. 4.38 – Variations de $K_a/K_{a_{initiale}}$ en fonction de h_f , b_f et L_f (a) $K_b(t_{h_f}, t_{L_f})/K_{b_{initiale}}$ (b) $K_b(t_{b_f}, t_{L_f})/K_{b_{initiale}}$ FIG. 4.39 – Variations de $K_b/K_{b_{initiale}}$ en fonction de h_f , b_f et L_f

Nous venons d'illustrer une autre utilisation possible de la matrice de complaisance sous forme symbolique. L'intérêt pour le concepteur est ici d'observer l'influence sur la rigidité de deux paramètres géométriques qui varient simultanément. On voit apparaître un problème d'optimisation multicritères : augmenter le volume de travail en modifiant L_f , tout en conservant les mêmes caractéristiques de rigidité, avec un gain de poids minimum pour le pied, en faisant varier les paramètres h_f et b_f .

4.8 Influence de la longueur L_{B_3} des barres de la jambe verticale

Dans le paragraphe 3.5.3, on a évalué l'Orthoglide selon l'indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$ lorsque la longueur L_{B_3} des barres de la jambe verticale varie. On a fait varier L_{B_3} de 0.5 à 2.5 fois L_B , L_B étant la longueur des barres des 2 autres jambes. Grâce aux expressions des κ_{ij} obtenues sous forme symbolique, on va pouvoir analyser les conséquences sur la rigidité d'une variation de L_{B_3} . C'est une autre utilisation possible des expressions symboliques.

On va par exemple observer sur la Fig. 4.40 l'influence de L_{B_3} sur $\kappa_{33}/\kappa_{33_{initiale}}$ et sur $\kappa_{44}/\kappa_{44_{initiale}}$ le long de l'axe (Q_1Q_2) . $t_{L_{B_3}}$ est le pourcentage de variation de L_{B_3} , et $\kappa_{33_{initiale}}$ (resp. $\kappa_{44_{initiale}}$) est calculé à l'isotropie en fonction des valeurs initiales des paramètres.

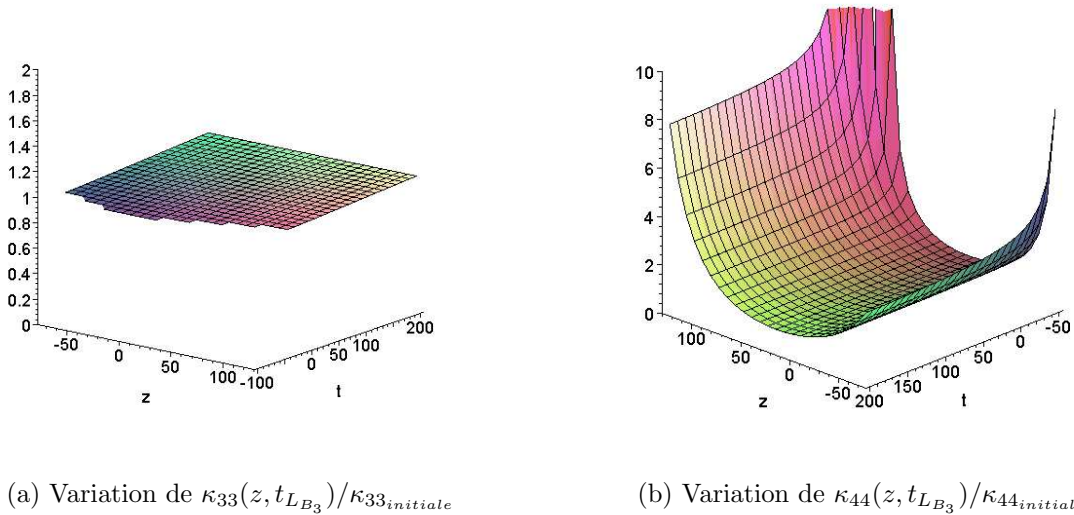


FIG. 4.40 – Variations de $\kappa_{33}(z, t_{L_{B_3}})/\kappa_{33_{initiale}}$ et $\kappa_{44}(z, t_{L_{B_3}})/\kappa_{44_{initiale}}$ le long de (Q_1Q_2)

On observe que $\kappa_{33}(z, t_{L_{B_3}})/\kappa_{33_{initiale}}$ est quasiment constant le long de (Q_1Q_2) , et que $\kappa_{44}(z, t_{L_{B_3}})/\kappa_{44_{initiale}}$ ne dépend quasiment pas de L_{B_3} lorsque z est fixé, sauf à proximité des points Q_1 et Q_2 et lorsque L_{B_3} dominue de plus de 20%. On peut donc conclure que L_{B_3} n'a pas beaucoup d'influence sur la rigidité le long de (Q_1Q_2) .

Pour formuler une conclusion définitive, il faudrait bien sûr observer tous les $\kappa_{ij}(x, y, z, t_{L_{B_3}})$ dans tout l'EDR. Néanmoins, on peut légitimement penser qu'avec la modélisation adoptée pour l'Orthoglide flexible, augmenter L_{B_3} a peu d'influence sur la rigidité. C'est intéressant car on vu dans le paragraphe 3.5.3 que l'indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$ augmente lorsque L_{B_3} augmente. On peut donc améliorer cet indice sans conséquences pour la rigidité.

4.9 Analyse des déplacements compliants de l'outil

Une autre utilisation intéressante des expressions symboliques des κ_{ij} est l'observation des déplacements compliants de l'outil soumis aux efforts de coupe. Les équations avec lesquelles on calcule la matrice de complaisance sont construites à partir du principe des travaux virtuels. On fait par conséquent l'hypothèse que les conditions de coupe simulées sont quasi-statiques. Dans ce paragraphe on va simuler l'usinage d'une rainure. Bien sûr, la complaisance d'une PKM n'est pas la principale source d'erreur, et calculer l'erreur de poursuite avec un modèle de rigidité sans prendre en compte les erreurs de modélisations du mécanisme et les erreurs de commande n'est pas réaliste. L'analyse qui va suivre peut donc être avantageusement complétée par la prise en compte de ces autres sources d'erreurs.

4.9.1 Calcul des déplacements compliants

\mathbf{w} représente le torseur statique des efforts de coupe appliqués sur l'outil lors de l'usinage d'une rainure le long de l'axe Y (Fig. 4.41).

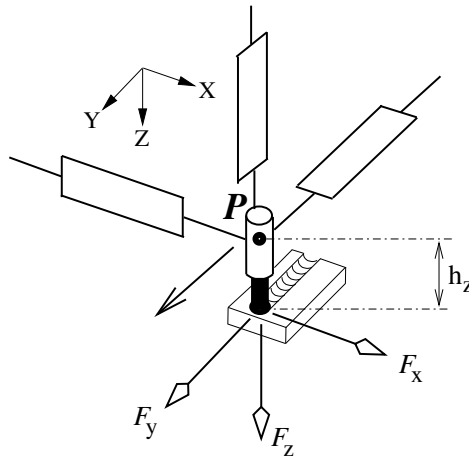


FIG. 4.41 – Usinage d'une rainure

$$\mathbf{w} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{T} \\ \mathbf{F} \end{array} \right\} \quad \text{avec} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} -F_y h_z \\ F_x h_z \\ 0 \end{bmatrix}$$

Les déplacements compliants de la plate-forme mobile valent :

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\kappa} \mathbf{w}$$

Avec :

$$\mathbf{t} = \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\Omega} \\ \mathbf{V} \end{array} \right\} \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$$

Les déplacements compliants à la pointe de l'outil valent :

$$\mathbf{t}_{\text{tool}} = \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\Omega} \\ \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{h}_z \mathbf{z} \end{array} \right\}$$

4.9.2 Exemple d'une décomposition en cascade d'un déplacement

Les expressions symboliques obtenues pour les déplacements compliants de l'outil sont volumineuses. On peut donc utiliser la décomposition en cascade proposée, et l'appliquer par exemple au terme v_z , qui est le déplacement selon l'axe Z :

$$v_z = -F_y h_z \kappa_{16} + F_x h_z \kappa_{26} + F_x \kappa_{46} + F_y \kappa_{56} + F_z \kappa_{66}$$

On extrait de v_z le numérateur N_{v_z} et le dénominateur D_{v_z} . N_{v_z} (resp. D_{v_z}) est une fonction de 24 (resp. 14) paramètres :

$$v_z = \frac{N_{v_z}(L_f, h_f, b_f, \cos(\lambda), \sin(\lambda), d, L_B, S_B, e, F_x, F_y, F_z, h_z, x, y, z, P_1, P_2, P_3, P_{12}, P_{13}, P_{23}, k_{act}, E)}{D_{v_z}(h_f, b_f, d, L_B, S_B, x, y, z, P_1, P_2, P_3, P_{12}, P_{13}, P_{23}, k_{act}, E)}$$

La Fig. 4.1 et le Tab. 4.13 décrivent les différents paramètres et leur degré dans N_{v_z} et D_{v_z} .

Voici un autre exemple de décomposition en cascade, celle de l'expression symbolique de N_{v_z} . L'ordre dans lequel les variables sont extraites est arbitraire.

Paramètre	Degré dans N_{v_z}	Degré dans D_{v_z}	Description
L_f	3	0	Longueur du pied, voir Fig.4.1
h_f, b_f	5	5	Dimensions de la section du pied
d	2	2	Distance entre les barres du parallélogramme
$\cos(\lambda)$	2	0	λ est l'angle entre l'axe du pied et l'axe de la liaison prismatique
$\sin(\lambda)$	1	0	idem
L_B	6	0	Longueur des barres du parallélogramme
S_B	1	1	Surface de la section droite des barres du parallélogramme
e	2	0	Voir Fig. 4.1
F_x, F_y, F_z	1	0	Forces exercées sur l'outil
h_z	1	0	Offset vertical
x, y, z	4	2	Coordonnées Cartésiennes
P_1, P_2, P_3	1	1	$P_1 = \sqrt{L_B^2 - x^2}$ $P_2 = \sqrt{L_B^2 - y^2}$ $P_3 = \sqrt{L_B^2 - z^2}$
P_{12}, P_{23}, P_{13}	1	2	$P_{12} = \sqrt{L_B^2 - x^2 - y^2}$ $P_{23} = \sqrt{L_B^2 - y^2 - z^2}$ $P_{13} = \sqrt{L_B^2 - x^2 - z^2}$
E	1	1	Module d'Young
k_{act}	1	1	Raideur de l'actionneur

TAB. 4.13 – Variables dans N_{v_z} et D_{v_z}

$$\begin{aligned}
N_{v_z}(L_f \dots k_{act}) &\rightarrow N_{v_z}(L_f) = a_3 L_f^3 + a_2 L_f^2 + a_1 L_f + a_0 \\
\hookrightarrow a_{i_1}(h_f \dots k_{act}) &\rightarrow a_{i_1}(h_f) = b_5 h_f^5 \dots b_1 h_f + b_0 \quad (i_1 = 0, 1, 2, 3) \\
\hookrightarrow b_{i_2}(b_f \dots k_{act}) &\rightarrow b_{i_2}(b_f) = c_5 b_f^5 \dots c_1 b_f + c_0 \quad (i_2 = 0, 1 \dots 5) \\
\hookrightarrow c_{i_3}(d \dots k_{act}) &\rightarrow c_{i_3}(d) = d_2 d^2 + d_1 d + d_0 \quad (i_3 = 0, 1 \dots 5) \\
\hookrightarrow d_{i_4}(\cos(\lambda) \dots k_{act}) &\rightarrow d_{i_4}(\cos(\lambda)) = e_2 \cos^2(\lambda) + e_1 \cos(\lambda) + e_0 \quad (i_4 = 0, 1, 2) \\
\hookrightarrow e_{i_5}(\sin(\lambda) \dots k_{act}) &\rightarrow e_{i_5}(\sin(\lambda)) = f_1 \sin(\lambda) + f_0 \quad (i_5 = 0, 1, 2) \\
\hookrightarrow f_{i_6}(L_B \dots k_{act}) &\rightarrow f_{i_6}(L_B) = g_6 L_B^6 + g_5 L_B^5 \dots + g_1 L_B + g_0 \quad (i_6 = 0, 1) \\
\hookrightarrow g_{i_7}(S_B \dots k_{act}) &\rightarrow g_{i_7}(S_B) = h_1 S_B + h_0 \quad (i_7 = 0 \dots 6) \\
\hookrightarrow h_{i_8}(e \dots k_{act}) &\rightarrow h_{i_8}(e) = i_2 e^2 + i_1 e + i_0 \quad (i_8 = 0, 1) \\
\hookrightarrow i_{i_9}(F_x \dots k_{act}) &\rightarrow i_{i_9}(F_x) = j_1 F_x + j_0 \quad (i_9 = 0, 1, 2) \\
\hookrightarrow j_{i_{10}}(F_y \dots k_{act}) &\rightarrow j_{i_{10}}(F_y) = k_1 F_y + k_0 \quad (i_{10} = 0, 1) \\
\hookrightarrow k_{i_{11}}(F_z \dots k_{act}) &\rightarrow k_{i_{11}}(F_z) = m_1 F_z + m_0 \quad (i_{11} = 0, 1) \\
\hookrightarrow m_{i_{12}}(h_z \dots k_{act}) &\rightarrow m_{i_{12}}(h_z) = n_1 h_z + n_0 \quad (i_{12} = 0, 1) \\
\hookrightarrow n_{i_{13}}(x \dots k_{act}) &\rightarrow n_{i_{13}}(x) = p_4 x^4 \dots p_1 x + p_0 \quad (i_{13} = 0, 1) \\
\hookrightarrow p_{i_{14}}(y \dots k_{act}) &\rightarrow p_{i_{14}}(y) = q_4 y^4 \dots + q_1 y + q_0 \quad (i_{14} = 0 \dots 4)
\end{aligned}$$

Il n'est là encore pas possible d'isoler complètement les variables L_B , x , y et z à cause des racines carrées des termes P_1 , P_2 , P_3 , P_{12} , P_{13} , P_{23} qui subsistent dans l'expression symbolique de N_{v_z} .

4.9.3 Choix d'une zone de travail en fonction de la tâche

Avec l'expression symbolique du déplacement de l'outil, on peut évaluer l'erreur de poursuite due aux efforts de coupe le long de la trajectoire de la rainure. Les paramètres variables sont les coordonnées Cartésiennes (x, y, z) . L'expression symbolique de l'erreur de poursuite peut alors servir à déterminer une zone de l'EDR favorable pour l'usinage d'une rainure ou de toute autre forme, c'est-à-dire une zone dans laquelle l'erreur de poursuite est faible.

Pour évaluer les efforts de coupe, on utilise un logiciel de simulation d'usinage à grande vitesse [Dugas 02]. En fonction des conditions de coupe, ce logiciel donne les efforts de coupe moyens. Nous nous plaçons dans les conditions suivantes :

- Vitesse de broche $N=20,000 \text{ tr.min}^{-1}$;
- Vitesse d'avance $V_f=40 \text{ m.min}^{-1}$, selon l'axe Y ;
- Profondeur de passe 5.10^{-3}mm ;
- Outil fraise boule de diamètre $\Phi = 10\text{mm}$ munie de 2 plaquettes ARS ;
- Matériau à usiner 40 CMD 8.

Ces conditions de coupe sont réalistes dans un contexte UGV. Les efforts de coupe simulés valent :

$$F_x = 215N$$

$$F_y = -10N$$

$$F_z = -25N$$

Ces efforts vont permettre de simuler le déplacement compliant de l'outil dans l'EDR, le long de trajectoires correspondant à l'usinage d'une rainure orientée selon l'axe Y (voir Fig. 4.41). On choisit $h_z=100\text{mm}$.

L'erreur de poursuite le long d'une trajectoire est la projection du vecteur déplacement compliant de l'outil dans le plan perpendiculaire à la trajectoire. Soient une trajectoire caractérisée par ses coordonnées (x_t, z_t) , et un point P de coordonnées (x_t, y_P, z_t) , situé sur cette trajectoire (Fig. 4.42). L'erreur de poursuite au point P vaut :

$$\delta_P = \sqrt{v_x^2 + v_z^2}$$

Les trajectoires sont définies dans l'EDR, donc x_t et z_t varient dans l'intervalle $[-73.65; 126.35]$.

La Fig. 4.43 représente l'erreur de poursuite le long de l'axe Q_1Q_2 . Cette courbe donne une idée de la zone de l'EDR où l'erreur de poursuite est la plus faible, même si chaque point de

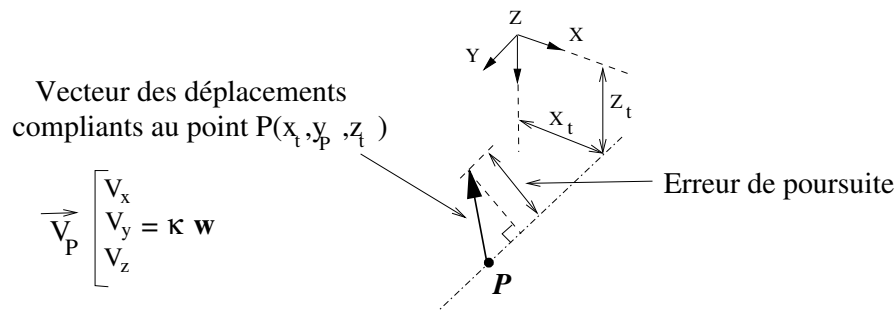
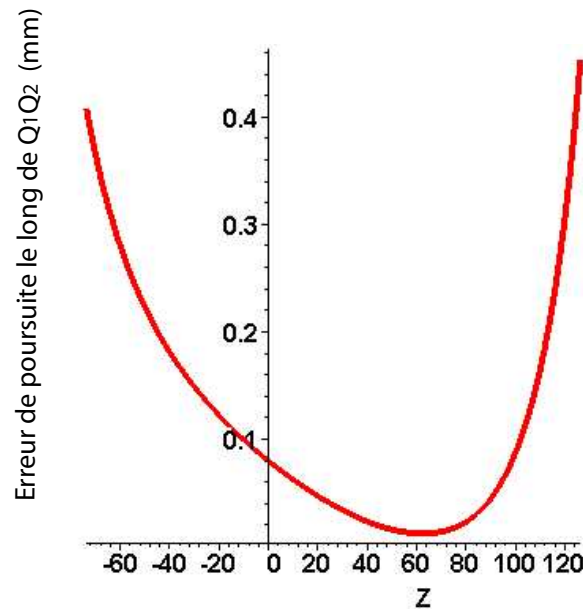


FIG. 4.42 – Calcul de l'erreur de poursuite

la courbe représente seulement l'erreur de poursuite en un seul point de chaque rainure repérée par le couple (x_t, z_t) , puisque les rainures sont orientées selon l'axe Y . La zone où l'erreur de poursuite est faible se trouve dans les z compris dans l'intervalle $[40; 80]$.

FIG. 4.43 – Erreur de poursuite le long de Q_1Q_2

Pour obtenir des informations plus exactes et plus précises, il faut calculer l'erreur de poursuite maximum le long de chaque rainure orientée selon l'axe Y . On a constaté que l'erreur de poursuite maximale se trouvait toujours aux extrémités de la trajectoire. La Fig. 4.44 illustre cette constatation : elle représente l'erreur de poursuite le long de la rainure repérée par les coordonnées $(0, 0)$. On voit bien que l'erreur maximale est atteinte lorsque $y = -73.65$, soit à une des extrémités de la rainure. Selon le couple (x_t, z_t) , le maximum peut être atteint en $y = -73.65$ ou en $y = 126.35$.

La Fig. 4.45 représente donc l'erreur de poursuite maximum pour chaque rainure repérée par ses coordonnées (x_t, z_t) . Les résultats obtenus mettent clairement en évidence une zone de l'EDR dans laquelle l'erreur de poursuite maximale est faible. Dans cette zone, x varie dans l'intervalle

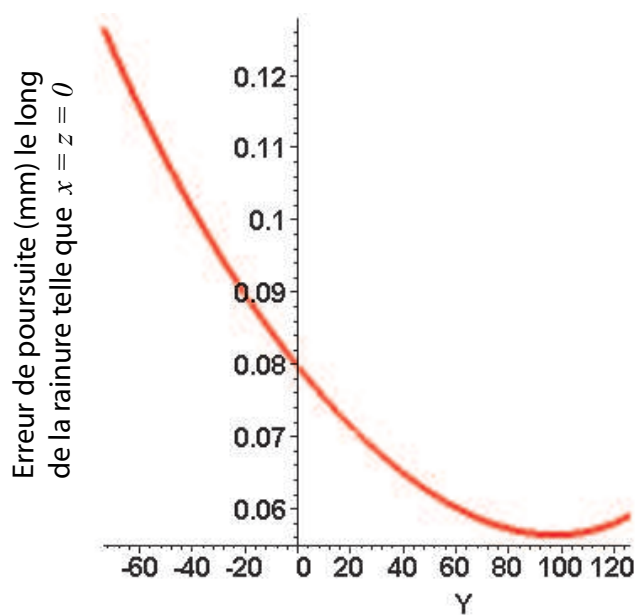


FIG. 4.44 – Erreur de poursuite le long de la rainure repérée par $x = z = 0$

$[-73.65; 0]$ et z varie dans l'intervalle $[50; 126.35]$. Il est difficile d'expliquer pourquoi l'erreur de poursuite maximum est plus faible dans cette zone. Cela dépend bien sûr des efforts appliqués, de leur intensité et de leur direction, mais aussi de la réaction de chaque liaison élastique aux efforts transmis par la jambe en fonction des coordonnées Cartésiennes. L'information obtenue, à savoir la localisation de la zone où l'erreur de poursuite est la plus faible, est néanmoins d'un grand intérêt pour l'utilisateur.

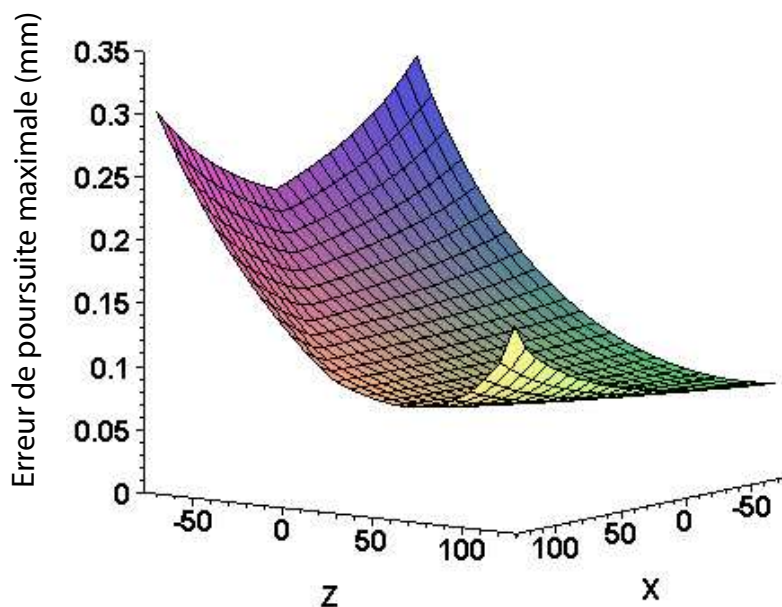


FIG. 4.45 – Erreur de poursuite maximale le long d'une rainure selon l'axe Y

Une autre utilisation de l'expression symbolique des déplacements serait l'optimisation des paramètres géométriques afin de minimiser l'erreur de poursuite pour des efforts de coupe fixés.

Cela reviendrait à optimiser la conception géométrique en fonction de la tâche. Il vaut mieux faire ce que nous avons fait dans le paragraphe 4.6, c'est-à-dire chercher à augmenter la rigidité en modifiant les paramètres à partir de l'analyse des éléments de la matrice de complaisance. Ainsi, on améliore la rigidité globale, ce qui est profitable à toutes les tâches d'usinage auxquelles est destinée la machine, et pas à une seule.

4.10 Comparaison du modèle de rigidité avec des mesures, avec un modèle éléments finis

4.10.1 Mesure expérimentale de la raideur

Des essais ont été menés à l'IRCCyN pour mesurer la raideur du prototype de l'Orthoglide et comparer les résultats avec ceux obtenus grâce au Modèle à Membrures Rigides (MMR) utilisé dans ce chapitre.

Le protocole expérimental est simple : des masses suspendues à des fils avec un système de poulies permettent de solliciter en force la plate-forme mobile selon les trois directions X , Y , et Z . Les déplacements de celle-ci sont mesurés avec des comparateurs selon les trois directions.

Un seul résultat est disponible, c'est la matrice de raideur translationnelle à l'isotropie, notée \mathbf{Kt} . Elle relie les forces appliquées sur la plate-forme mobile aux déplacements en translation de celle-ci. Ses éléments sont exprimés en N.mm^{-1} . \mathbf{Kt} vaut :

$$\mathbf{Kt} = \begin{pmatrix} 200 & 100 & 10 \\ 100 & 200 & 20 \\ 10 & 20 & 200 \end{pmatrix}$$

La matrice de raideur translationnelle à l'isotropie obtenue avec le MMR, notée $\mathbf{Kt}_{\text{modele}}$, vaut quant à elle :

$$\mathbf{Kt}_{\text{modele}} = \begin{pmatrix} 2715 & 0 & 0 \\ 0 & 2715 & 0 \\ 0 & 0 & 2715 \end{pmatrix}$$

L'ordre de grandeur des éléments diagonaux de $\mathbf{Kt}_{\text{modele}}$ est 10 fois plus grand que celui des éléments de \mathbf{Kt} . Notre MMR est donc plus rigide que le prototype qu'il modélise. Si les mesures sont correctes, cette différence peut s'expliquer par le fait que le MMR ne prend pas en compte la flexibilité des liaisons cinématiques entre membrures, ou que le jeu entre certaines pièces du prototype n'a pas été rattrapé avant de faire la mesure.

On peut considérer que les éléments $Kt_{1,3} = 10$ et $Kt_{2,3} = 20$ sont négligeables par rapport à $Kt_{1,1} = 200$, $Kt_{2,2} = 200$, $Kt_{3,3} = 200$ et $Kt_{1,2} = 100$. Il est alors très surprenant que $Kt_{1,2}$ soit du même ordre de grandeur que les éléments diagonaux à l'isotropie. À part une erreur de mesure, il est difficile d'expliquer ce phénomène, car clairement à l'isotropie les termes de couplage sont très faibles.

Il faudrait mener une autre campagne de mesure afin d'en avoir le coeur net.

Le fait que le MMR de l'Orthoglide soit isostatique (alors que le prototype est hyperstatique) n'a aucune influence sur la différence entre $\mathbf{Kt}_{\text{modele}}$ et \mathbf{Kt} . En effet, dans le cas de l'Orthoglide hyperstatique c'est la distribution des couples dans les jambes qui pose problème, pas la distribution des efforts. Or la matrice de raideur translationnelle relie les efforts aux déplacements de la plate-forme, seulement les efforts et pas les couples.

4.10.2 Avec un modèle éléments finis

Un Modèle Éléments Finis (MEF) de l'Orthoglide a été réalisé au LARAMA de l'IFMA à Clermont-Ferrand dans le cadre d'une collaboration entre l'IRCCyN et le LARAMA au sein du projet ROBEA (programme national du CNRS).

Le MEF a permis de calculer les plages de variation des éléments diagonaux $Kt_{1,1}$, $Kt_{2,2}$, $Kt_{3,3}$ de \mathbf{Kt} , à partir de la modélisation CAO de l'Orthoglide dans le logiciel éléments finis ANSYS. Il est important de souligner que le MEF est basé sur un Orthoglide hyperstatique, et qu'il prend en compte la flexibilité des liaisons cinématiques (de type pivot) qui composent chaque jambe. Malheureusement, seules les raideurs translationnelles ont été évaluées ce qui, pour les mêmes raisons que dans le paragraphe précédent, ne permet pas d'évaluer l'influence de l'hyperstatisme.

Les résultats du MEF sont seulement donnés par plages de variation des $Kt_{i,j}$ à une altitude donnée. La Fig. 4.46 représente par exemple l'évolution de $Kt_{1,1}$ en fonction de la position Cartésienne dans le plan (X,Y) lorsque $z = 0$.

Pour pouvoir comparer ces résultats avec ceux du MMR, nous avons évalué les valeurs des $Kt_{i,j}$ obtenues à partir du MEF en interpolant visuellement ces cartes de rigidité.

Dans le Tab. 4.14, nous rassemblons les résultats obtenus aux points Q_1 , Q_2 et à l'isotropie. L'objectif est de comparer le MEF au MMR. Les raideurs sont exprimées en N.mm^{-1} . Nous avons laissé toute la plage de variation lorsque l'interpolation de la carte de rigidité obtenue avec le MEF était délicate.

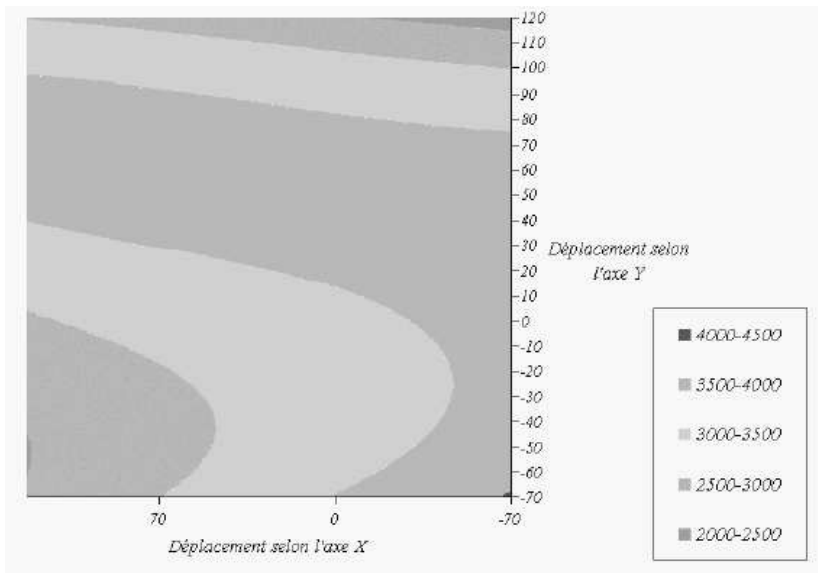


FIG. 4.46 – Carte de rigidité de $Kt_{1,1}$ pour $z = 0$

	$Kt_{1,1}$			$Kt_{2,2}$		
	MEF	MMR	Différence	MEF	MMR	Différence
Q_1	2500	1653	51%	2000	1653	21%
Q_2	2500	2437	2.6%	1000	2437	-59%
Isotropie	3500	2715	29%	3500/4000	2715	29%/47%
	$Kt_{3,3}$					
	MEF	MMR	Différence			
Q_1	3000	1653	81%			
Q_2	3000	2437	23%			
Isotropie	3500/4000	2715	29%/47%			

TAB. 4.14 – Comparaison du MMR avec un Modèle Éléments Finis

On constate que les ordres de grandeur entre le MEF et le MMR sont identiques, comparés aux résultats obtenus expérimentalement, ce qui est intéressant pour la validité de notre modèle. En effet, le MEF est considéré comme étant plus réaliste que le MMR car la discrétisation des flexibilités est bien plus fine, et qu'en plus il prend en compte la flexibilité des liaisons cinématiques.

Mais les valeurs numériques du MEF et du MMR ne sont pas égales pour autant : on observe des variations entre les résultats des deux modèles allant de 2.6% à 81% selon les coordonnées Cartésiennes (voir Tab. 4.14). À première vue il n'est pas possible de relier la variation des résultats à la position.

Par contre, les valeurs de $Kt_{1,1}$, $Kt_{2,2}$, $Kt_{3,3}$ calculées avec le MEF le long de l'axe (Q_1Q_2) ne sont pas égales, alors qu'elles le sont avec le MMR. Une explication peut être que la géométrie

du MMR est simplifiée par rapport à la géométrie réelle du prototype qui a été utilisée pour implémenter le MEF. En particulier, la plate-forme mobile du prototype est une pièce dont la forme n'est pas du tout symétrique par rapport à l'axe (Q_1Q_2) , ce que nous n'avons pas pris en compte dans le MMR.

Il est néanmoins intéressant de constater que notre MMR, avec ses hypothèses simplificatrices (Orthoglide isostatique, flexibilités des liaisons cinématiques pas prises en compte) permet d'obtenir des résultats aux ordres de grandeur identiques à ceux obtenus avec le MEF, même si l'influence de l'hyperstatisme ne peut être évaluée parce que les raideurs torsionnelles n'ont pas été évaluées à l'aide du MEF.

L'avantage de notre MMR reste qu'il permet plus facilement que le MEF de détecter les membrures critiques pour la rigidité, grâce aux expressions symboliques des éléments de la matrice de raideur. Le MMR est plus facile à utiliser en pré-conception que le MEF.

Une fois le MMR validé, on peut l'utiliser pour l'aide à la correction et au placement de trajectoires d'usinage, afin de diminuer l'erreur de poursuite, le déplacement en translation ou en rotation de l'outil. Le MMR de l'Orthoglide proposé dans ce chapitre est représentatif de l'influence relative des paramètres géométriques même si les résultats quantitatifs ne sont pas parfaitement égaux à ceux obtenus avec le MEF.

4.11 Conclusions

Analyser la rigidité d'une PKM afin d'identifier les paramètres géométriques influents et savoir comment les modifier pour augmenter la rigidité est un problème très important dont la résolution permet d'améliorer la précision d'une PKM, ce qu'un concepteur de PKM cherche à faire en général.

La contribution de ce chapitre, i.e. le calcul de la matrice de complaisance de l'Orthoglide sous forme symbolique, est donc une contribution très utile pour répondre à ce problème. Naturellement, la complexité du modèle géométrique de la PKM analysée peut gêner la réalisation pratique de la programmation sous forme symbolique de la méthode présentée dans [Gosselin 02]. La contribution de ce chapitre peut néanmoins être facilement adaptée à d'autres PKM à translations munies de parallélogrammes comme celles du chapitre précédent, ce qui lui confère un bon niveau de généralité.

Nous avons également illustré les possibilités offertes par le calcul de la matrice de complaisance d'une PKM sous forme symbolique : de très nombreuses informations peuvent être

obtenues grâce aux expressions symboliques des éléments κ_{ij} ou à celles des déplacements compliants produits par les efforts de coupe. L'analyse paramétrique de ces expressions permet la détection et la hiérarchisation des membrures et des paramètres géométriques critiques, l'évaluation rapide de la rigidité lorsque l'on modifie les paramètres géométriques afin d'optimiser une architecture.

Chapitre 5

Conclusions

Dans ce dernier chapitre nous allons faire la synthèse des résultats présentés dans les chapitres précédents. Nous allons orienter cette synthèse vers la conception de PKM. En effet, les résultats que nous avons proposé s'inscrivent dans ce contexte, et il est important de rappeler de quelle façon.

5.1 État de l'art de la conception de PKM

L'intérêt du chapitre 2 est qu'il présente un état de l'art détaillé et actualisé de la conception de PKM. Ce chapitre relie de nombreux travaux théoriques à la conception de PKM.

Après avoir rappelé les notions et concepts de base en robotique parallèle, nous avons présenté les limites des machines outils sérielles, et après avoir expliqué brièvement pourquoi les PKM étaient une alternative intéressante, étant donné les défauts des machines sérielles avec l'UGV, nous avons présenté une revue des familles de PKM existantes, industrialisées ou en voie de l'être. Nous avons en particulier présenté les différentes PKM à translations, car les contributions de cette thèse portent spécifiquement sur cette famille de PKM. Les PKM à translations sont en effet très intéressantes car de nombreuses tâches s'effectuent en 3 axes.

Puis, nous avons détaillé les principaux avantages et inconvénients des PKM, et présenté quelques solutions pour résoudre ces derniers, dont les plus gênants pour l'usinage sont la présence de singularités au voisinage desquelles la rigidité est perdue, le faible volume de travail par rapport à l'encombrement, la forme complexe de l'espace de travail, la variation des performances cinéostatiques. Nous avons présenté une synthèse comparative des avantages et inconvénients des PKM et des machines outils sérielles, puis nous avons mis en évidence l'intérêt particulier de certains manipulateurs à translations : les LTPM isotropes. Les LTPM isotropes résolvent en effet deux inconvénients majeurs des PKM : ils possèdent à la fois un grand espace de travail et des performances cinéostatiques constantes, deux caractéristiques que les autres PKM ne possèdent malheureusement pas.

Nous nous sommes ensuite intéressés à la conception de PKM, qui englobe la synthèse structurelle et la synthèse géométrique. La synthèse structurelle est une tâche très compliquée car elle implique de rationaliser le processus intellectuel mis en oeuvre par le concepteur de mécanismes, qui est souvent basé sur l'imagination, l'intuition et l'expérience. Des travaux prometteurs existent, dont certains font appel à des outils mathématiques de l'algèbre linéaire : la théorie des visseurs ou le groupe de Lie des déplacements. La synthèse géométrique de PKM fait appel aux méthodes d'optimisation, courantes en conception mécanique, qui permettent de déterminer les paramètres géométriques en fonction de critères de performance prescrits, évalués à l'aide d'indices. La revue des indices de performance utilisés en synthèse géométrique de mécanismes parallèles fait apparaître un manque : la conception de PKM a besoin d'indices de performance spécifiques prenant en compte les besoins réels des utilisateurs.

Enfin, nous avons passé en revue les différentes caractéristiques d'une PKM qui influent sur sa précision, qui est un critère de performance fondamental. L'analyse de rigidité des PKM est très importante pour analyser les paramètres géométriques critiques pour la précision. Les méthodes existantes d'analyse de rigidité sont présentées, et l'une d'elles [Gosselin 02] retient

notre attention car elle est très générique tout en étant assez facile à utiliser en pratique.

Le chapitre 2 a mis en évidence deux manques que cette thèse a contribué à combler :

1. Le besoin d'indices de performance adaptés aux PKM à translations ;
2. Le besoin d'outils pour l'analyse de rigidité des PKM, flexibles et faciles à utiliser en pré-conception.

5.2 Contributions Franco-Québécoises à la conception de PKM

5.2.1 Contexte géoscientifique de la thèse

Cette thèse présente l'originalité d'avoir été réalisée conjointement dans deux laboratoires, l'un situé au Québec (Canada) et l'autre en France. Aussi, l'un des objectifs de ce manuscrit est de réaliser la fusion de travaux réalisés au sein d'équipes de recherche indépendantes. Cette fusion est effective, car les contributions des chapitres 3, d'inspiration française, et 4, d'inspiration québécoise, s'imbriquent l'une dans l'autre de façon naturelle. La contribution du chapitre 3 s'appuie sur les travaux présentés dans [Chablat 03], et la contribution du chapitre 4 s'appuie sur les travaux présentés dans [Gosselin 02].

5.2.2 Proposition d'une démarche pour l'analyse et la conception de PKM à translations

Pour conclure, nous allons synthétiser les chapitres 3 et 4 sous la forme d'un schéma qui résumera la démarche proposée dans cette thèse pour l'analyse et la conception de PKM à translations (Fig. 5.1).

Ce schéma résume la combinaison des contributions de cette thèse : analyse cinétostatique puis analyse de rigidité, l'analyse cinétostatique prenant en compte des paramètres (par exemple la longueur des barres du parallélogrammes) sans influence pour la rigidité et réciproquement : les paramètres du pied, très important pour la rigidité, n'ont pas d'influence sur $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$ ou $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{V}$. L'analyse de rigidité permet ainsi d'optimiser des paramètres qui ne sont pas optimisés par l'analyse cinétostatique, ce qui donne à notre méthode un caractère global.

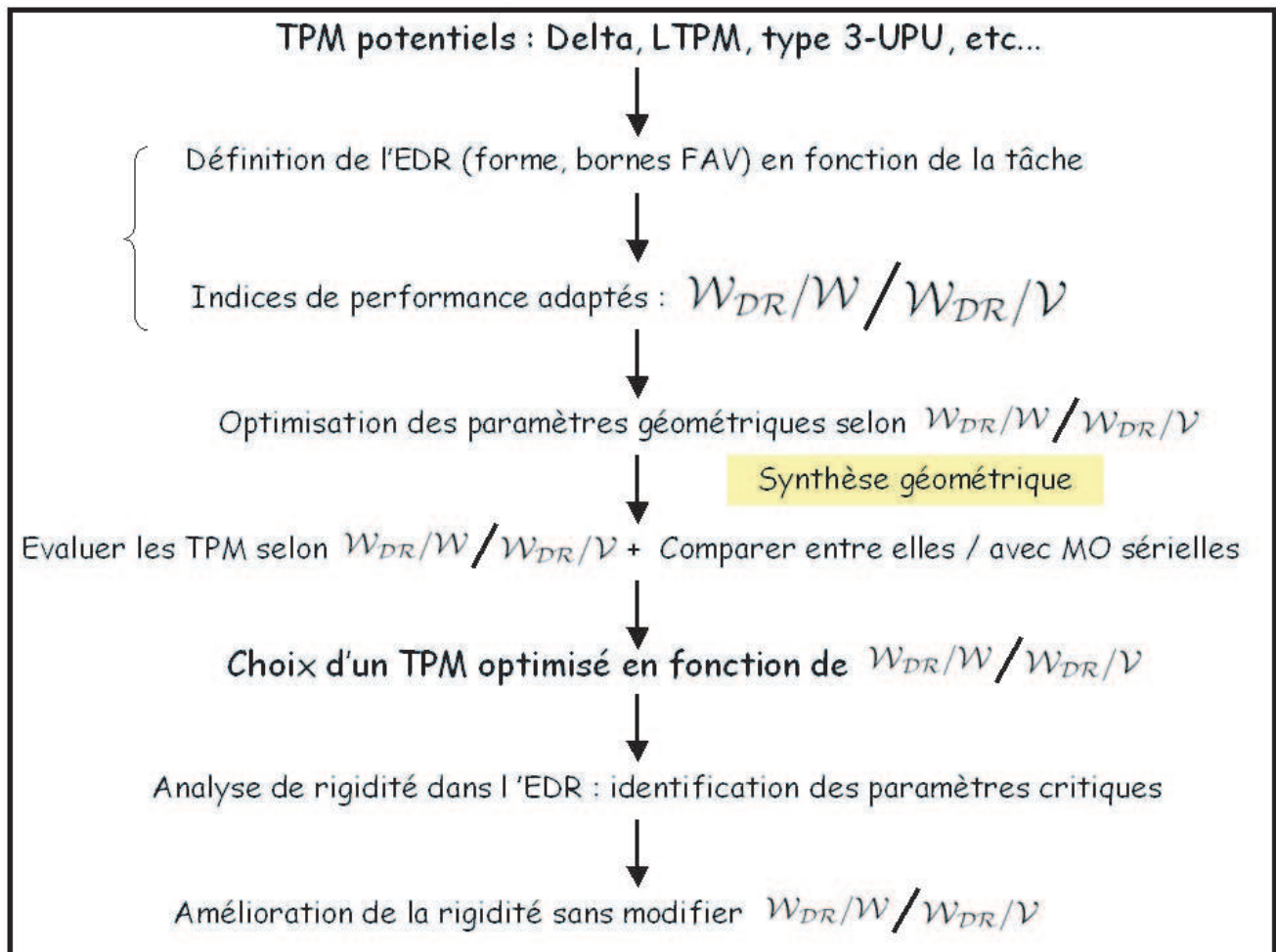


FIG. 5.1 – Méthode pour choisir et optimiser une PKM à translations

5.3 Perspectives

Les perspectives à donner à ce travail ont été mises en évidence tout au long des chapitres 3 et 4, car nous avons pris soin d'expliquer en détails les choix faits aux différentes étapes. Le but était de mettre clairement en évidence les pistes suivies et celles qui restaient inachevées.

Deux perspectives très intéressantes à explorer sont tout d'abord :

1. L'analyse cinétostatique du LTPM isotrope de type "Tripteron" [Kong 02a] pour évaluer le couplage rigidité / dynamique de cette PKM. Il faudrait d'une part construire un modèle dynamique symbolique du Tripteron, et d'autre part appliquer la méthode de rigidité sous forme symbolique utilisée dans le chapitre 4, pour ensuite relier les deux modèles et observer l'influence simultanée des paramètres géométriques sur les performances dynamiques et la rigidité. Ceci permettrait d'évaluer la viabilité d'une PKM de type LTPM isotrope qui, si elle s'avérait, pourrait marquer le début du développement d'un prototype de PKM à translations prometteur. Aujourd'hui, deux prototypes de LTPM isotropes existent (voir

Fig. 2.31 et 2.30 dans le paragraphe 2.2.3.3), mais ils ne sont pas encore développés pour l'usinage.

2. L'analyse de rigidité de l'Orthoglide hyperstatique afin de mettre concrètement en évidence l'intérêt de l'hyperstatisme pour la rigidité. Cependant, comme on l'a dit dans le paragraphe 4.10, c'est la distribution des couples qui pose problème, pas celle des efforts. Or parmi les liaisons élastiques associées au pied, qui est la membrure critique, les plus nuisibles sont celles qui sont sollicitées par les forces que la jambe transmet. Par conséquent, il se peut que la rigidité de l'Orthoglide hyperstatique ne soit pas forcément très supérieure à celle de l'Orthoglide isostatique. Par contre, l'hyperstatisme peut améliorer significativement la rigidité dans le cas où l'on prend en compte dans le modèle compliant la flexibilité des liaisons cinématiques entre les membrures.

Ces perspectives ont un caractère appliqué et non fondamental, elles portent sur l'analyse et la validation d'architectures prometteuses pour l'usinage 3 axes. Des résultats positifs (Tripteron viable pour l'UGV, rigidité améliorée pour l'Orthoglide) pourraient aider à valoriser les PKM auprès des industriels.

Une perspective plus large à donner à notre travail serait de le placer dans le contexte de l'optimisation de PKM multiobjectifs ou multicritères, avec l'optimisation des indices de performance cinétostatiques $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$ ou $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{V}$ et l'optimisation de la rigidité. Une analyse de sensibilité de la PKM à optimiser [Caro 04] apporterait d'autres contraintes, et pourrait être corrélée avec l'analyse de rigidité à partir du modèle symbolique. Des critères subjectifs à définir pourraient également intervenir, comme l'orientation des axes de la machine. Il est clair par exemple que l'orientation initiale des axes de l'Orthoglide est plus simple à comprendre pour l'utilisateur qui veut placer une pièce dans l'espace de travail que l'orientation diagonale type HexaM (voir Fig. 3.25). Le choix de l'orientation des axes peut également influencer sur l'accessibilité (et sur le dimensionnement des moteurs à cause de l'orientation de la pesanteur, mais ce critère n'est pas subjectif).

Bibliographie

- [Angeles 2003] J. Angeles, *Fundamentals of Robotic Mechanical Systems : Theory, Methods, and Algorithms*, 2nd Edition, Springer-Verlag, 2003.
- [Ball 1900] S. R. Ball, *A Treatise on the Screw Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, England, 1900.
- [Bonev Web 1] I. A. Bonev, *Delta Parallel Robot : the story of a success*, Web review, <http://www.parallemic.org/Reviews/Review002.html>
- [Bonev Web 2] I. A. Bonev, *The true origin of Parallel Robots*, Web review, <http://www.parallemic.org/Reviews/Review007.html>
- [Bonev 02] I. A. Bonev, *Geometric Analysis of Parallel Mechanisms*, Ph.D. Thesis, Université Laval, Novembre 2002.
- [Boudreau 99] R. Boudreau, C. M. Gosselin, *La Synthèse d'une plate-forme de Gough-Stewart pour un espace atteignable prescrit*, 10th World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms, pp. 449-454, Oulu, June 1999.
- [Bouzgarrou 02] B. C. Bouzgarrou, B. Thuilot, P. Ray, G. Gogu, *Modélisation des manipulateurs flexibles appliquées aux machines UTGV*, Mécanique et Industries, vol. 3, no. 2, pp. 173-180, mars-avril 2002.
- [Bouzgarrou 04] B. C. Bouzgarrou, J. C. Fauroux, G. Gogu, Y. Heerah, *Rigidity analysis of T3R1 parallel robot uncoupled kinematics*, Proceedings of the 35th International Symposium on Robotics, Paris, March 2004.
- [Brogardh 02] T. Brogardh, *PKM Research - Important Issues, as seen from a Product Development Perspective at ABB Robotics*, Workshop on Fundamental Issues and Future Research Directions for Parallel Mechanisms and Manipulators, Quebec City, Canada, October 2002.
- [Callegari 03] M. Callegari, M. Tarantini, *Kinematic Analysis of a Novel Translational Platform*, ASME Journal of Mechanical Design, vol. 125, pp. 308-315, June 2003.

- [Caro 04] S. Caro, P. Wenger, F. Bennis, D. Chablat, Sensitivity Analysis of The Orthoglide, ASME International DETC Conferences, Salt Lake City, September, 2004.
- [Carricato 02] M. Carricato, V. Parenti-Castelli, *Singularity-Free Fully Isotropic Translational Parallel Mechanisms*, International Journal of Robotics Research, vol. 21, no. 2, pp. 161-174, 2002.
- [Carricato 03] M. Carricato, V. Parenti-Castelli, *A Family of 3-DOF Translational Parallel Manipulators*, ASME Journal of Mechanical Design, vol. 125, pp. 302-307, June 2003.
- [Carricato 03a] M. Carricato, V. Parenti-Castelli, *Kinematics of a Family of Translational Parallel Manipulator with Three 4-DOF Legs and Rotary Actuators*, Journal of Robotic Systems, vol. 20, no. 7, pp. 373-389, 2003.
- [Ceccarelli 02] M. Ceccarelli, G. Carbone, *A Stiffness Analysis for CaPaMan (Cassino Parallel Manipulator)*, Mechanism and Machine Theory, vol. 37, pp 427-439, 2002.
- [Chablat 98] Chablat D., Wenger P., *Working Modes and Aspects in Fully-Parallel Manipulator*, IEEE Int. Conf. On Robotics and Automation, pp. 1964-1969, 1998.
- [Chablat 98a] Chablat D., *Domaines d'unicité et parcourabilité pour les manipulateurs pleinement parallèles*, Thèse de Doctorat de l'Université de Nantes et de l'Ecole Centrale de Nantes, Novembre 1998.
- [Chablat 02] D. Chablat, S. Caro, P. Wenger, J. Angeles, *The Isoconditionning Loci of Planar Three-DOF Parallel Manipulators*, Proceedings of the 29th ASME Design Automation Conference, Montreal, Canada, September 2002.
- [Chablat 03] D. Chablat and P. Wenger, *Architecture Optimization of the Orthoglide, a 3-DOF Parallel Mechanism for Machining Applications*, IEEE Transactions on Robotics and Automation, vol. 19, no. 3, pp 403-410, June 2003.
- [Chablat 03 bis] Chablat, D., Majou, F., Wenger, P., *The Optimal Design of a Three Degree-of-Freedom Parallel Mechanism for Machining Applications*, Proceedings of the 11th International Conference on Advanced Robotics, Coimbra, Portugal, July 2003.
- [Chablat 04] Chablat, D., Wenger, P., Majou, F., Merlet, J.P., *An Interval Analysis Based Study for the Design and the Comparison of Three-DOF Parallel Kinematic Machines*, International Journal of Robotics Research, 2004.
- [Chedmail 98] P. Chedmail, E. Dombre, P. Wenger, *La CAO en Robotique*, Hermes Editions, 1998.
- [Clavel 88] Clavel R., *DELTA, a Fast Robot with Parallel Geometry*, Proceedings of the 18th International Symposium on Robotic Manipulators, IFR Publication, pp. 91-100, 1988.
- [Clavel 90] R. Clavel, *Device for the Movement and Positioning of an Element in Space*, US Patent 4 976 582, December 11, 1990.
- [Company 00] O. Company, *Machines-outils rapides à structures parallèles. Méthodologie de conception, applications et nouveaux concepts*, Thèse de Doctorat, Université Montpellier II, Décembre 2000.

- [Company 02] O. Company, F. Pierrot, *Modelling and Design Issues of a 3-axis Parallel Machine-Tool*, Mechanism and Machine Theory, vol. 37, pp 1325-1345, 2002.
- [Corradini 03] C. Corradini, J.C. Fauroux, S. Krut, O. Company, *Evaluation of a 4-Degree-of-Freedom Parallel Manipulator Stiffness*, Proc. of the 11th World Congress in Mechanism and Machine Science, IFToMM, Tianjin, China, April 2004.
- [Daney 00] D. Daney, *Étalonnage Géométrique des Robots Parallèles*, Thèse de Doctorat, Université de Nice Sophia-Antipolis, Février 2000.
- [Denavit 64] J. Denavit, R. S. Hartenberg, *Kinematic Synthesis of Linkages*, McGraw-Hill, New York, 1964.
- [Di Gregorio 99] R. Di Gregorio, V. Parenti-Castelli, *Mobility Analysis of the 3-UPU Parallel Mechanism Assembled for a Pure Translational Motion*, Proceedings of the IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics, Atlanta, USA, September 1999.
- [Di Gregorio 99a] R. Di Gregorio, V. Parenti-Castelli, *Influence of Leg Flexibility on the Kinetostatic Behavior of a 3-DOF Fully Parallel Manipulator*, 10th World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms, Oulu, Finland, June 1999.
- [Di Gregorio 02] R. Di Gregorio, *Translational Parallel Manipulators : New Proposals*, Journal of Robotic Systems, vol. 19, no. 12, pp. 595-603, 2002.
- [Dugas 02] A. Dugas, J.J. Lee, M. Terrier, J.Y. Hascoët, *Virtual Manufacturing for High Speed Milling*, 35th CIRP International Seminar on Manufacturing Systems, pp. 199-205, Seoul, Korea, May 13-15, 2002.
- [Fang 02] Y. Fang, L. W. Tsai, *Structure Synthesis of a Class of 4-DOF and 5-DOF Parallel Manipulators with Identical Limb Structures*, International Journal of Robotics Research, vol. 21, no. 9, pp. 799-810, September 2002.
- [Fayet 95] M. Fayet, *Hyperstatisme au Sens de la Dynamique et au Sens de la Cinématique - Dualité*, Mechanism and Machine Theory, vol. 30, no. 2, pp. 233-252, 1995.
- [Geldart 03] M. Geldart, P. Webb, H. Larsson, M. Backstrom, N. Gindy, K. Rask, *A direct Comparison of the Machining Performance of a Variax 5 axis Parallel Kinetic Machining Centre with Conventional 3 and 5 axis Machine Tools*, International Journal of Machine Tools and Manufacture, vol. 43, no. 15, pp 1561-1569, September 2003.
- [Gough 62] V. E. Gough, S. G. Whitehall, *Universal tyre testing machine*, Proceedings of the FISITA 9th International Technical Congress, pp. 117-137, May 1962.
- [Gosselin 90] C. M. Gosselin, *Stiffness Mapping for Parallel Manipulators*, IEEE Transactions on Robotics and Automation, vol. 6, pp 377-382, June 1990.
- [Gosselin 90b] C. M. Gosselin, *Determination of the workspace of 6-DOF parallel manipulators*, ASME Journal of Mechanical Design, vol. 112, no. 3, pp. 331-336, 1990.
- [Gosselin 90c] C. M. Gosselin, J. Angeles, *Singularity Analysis of Closed-loop kinematic chains*, IEEE Transactions on Robotics and Automation, vol. 6, no. 3, pp. 281-290.

- [Gosselin 96] C. M. Gosselin, E. St Pierre, M. Gagné, *On the development of the agile eye : mechanical design, control issues and experimentation*, IEEE Robotics and Automation Society Magazine, vol. 3, no. 4, pp. 29-37, 1996.
- [Gosselin 98] C. M. Gosselin, *Mécanique des Manipulateurs*, Cours donné à l'Université Laval, 1998.
- [Gosselin 02] C. M. Gosselin, D. Zhang, *Stiffness Analysis of Parallel Mechanisms using a Lumped Model*, International Journal of Robotics and Automation, vol. 17, no. 1, pp 17-27, 2002.
- [Guegan 03] S. Guegan, *Contribution à la modélisation et à l'identification dynamique des robots parallèles*, Thèse de doctorat, Université de Nantes, Novembre 2003.
- [Gwinnett 31] J. E. Gwinnett, *Amusement Device*, US Patent no. 1,789,680, January 20, 1931.
- [Haugh 95] R.J. Haugh, F.A. Adkins, C.M. Luh, *Domain of Operation and Interference for Bodies in Mechanisms and Manipulators*, in J.P. Merlet, B. Ravani, Editors, Computational Kinematics, pp. 193-202, Kluwer, 1995.
- [Hervé 91] J.M. Hervé, F. Sparacino, *Structural Synthesis of Parallel Robots Generating Spatial Translations*, 5th International Conference on Advanced Robotics, vol. 1, pp. 808-813, Pisa, Italy, 1991.
- [Hervé 92] J.M. Hervé, F. Sparacino, *Star, a New Concept in Robotics*, 3rd International Workshop on Advances in Robot Kinematics, pp. 180-183, 1992.
- [Hervé 99] J.M. Hervé, *The Lie Group of Rigid Body Displacements, a Fundamental Tool for Mechanism Design*, Mechanism and Machine Theory, vol. 34, pp. 719-730, 1999.
- [Hesselbach 02] J. Hesselbach, M. B. Helm, S. Soetbier, *Connecting Assembly Modes for Workspace*, Proceedings of the 8th International Symposium on Advances in Robot Kinematics, Caldes de Malavella, Spain, June 2002.
- [Holy 00] F. Holy, K. Steiner, *Machining system with movable tool head*, US Patent 6 161 992, December 19, 2000.
- [Hong 00] K.-S. Hong, J.-G. Kim, *Manipulability Analysis of a Parallel Machine Tool : Application to Optimal Length Design*, Journal of Robotics Systems, vol. 17, no. 8, pp. 403-415, 2000.
- [Hunt 78] K.H. Hunt, *Kinematic Geometry of Mechanisms*, Oxford University Press, 1978.
- [Huang 02] T. Huang, X. Zhao, D. J. Whitehouse, *Stiffness Estimation of a Tripod-based Parallel Kinematic Machine*, IEEE Transactions on Robotics and Automation, vol. 18, no. 1, pp 50-58, February 2002.
- [Huang 02a] T. Huang, D. J. Whitehouse, D. G. Chetwynd, *A Unified Error Model for Tolerance Design, Assembly and Error Compensation of 3-DOF Parallel Kinematic Machines with Parallelogram Struts*, Annals of the CIRP, vol. 51, no. 1, 2002.
- [Jo 89] D.Y. Jo, E.J. Haug, *Workspace Analysis of closed-loop mechanisms with unilateral constraints*, ASME Design Automation Conference, March 1989.

- [Joshi 03] S. Joshi, L.-W. Tsai, *A Comparison Study of Two 3-DOF Parallel Manipulators : One with Three and the Other with Four Supporting Legs*, IEEE Transactions on Robotics and Automation, vol. 19, no. 2, pp 200-209, April 2003.
- [Karouia 03] Mourad Karouia, *Conception structurale de mécanismes parallèles sphériques*, Thèse de doctorat, Ecole Centrale Paris, 2003.
- [Khasawneh 99] B. S. El-Khasawneh, P. M. Ferreira, *Computation of Stiffness and Stiffness Bounds for Parallel Link Manipulators*, International Journal of Machine Tools and Manufacture, vol. 39, pp 321-342, 1999.
- [Kim 00] J. Kim, F. C. Park, M. Kim, *Geometric Design Tools for Stiffness and Vibration Analysis of Robotic Mechanisms*, Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation, San Francisco, April 2000.
- [Kim 02] J. Kim, J.C. Hwang, J.S. Kim, C.C. Iurascu, F.C. Park, Y.M. Cho, *Eclipse II : a New Parallel Mechanism Enabling Continuous 360-Degree Spinning Plus Three-Axis Translational Motions*, IEEE Transactions on Robotics and Automation, vol. 18, no. 3, June 2002.
- [Kim 02b] H.S. Kim, L.W. Tsai, *Evaluation of a Cartesian Manipulator*, 8th Symposium on Advances in Robot Kinematics, Caldes de Malavella, Spain, 2002.
- [Kim 03] D. Kim, W. K. Chung, *Kinematic Condition Analysis of Three-DOF Pure Translational Parallel Manipulators*, ASME Journal of Mechanical Design, vol. 125, pp. 323-331, June 2003.
- [Kong 01] , X. Kong, C. M. Gosselin, *Generation of Parallel Manipulators with Three Translational Degrees of Freedom based on Screw Theory*, Proceedings of the 2001 CCToMM Symposium on Mechanisms, Machines and Mechatronics, St Hubert, Montreal, June, 2001.
- [Kong 02a] X. Kong, C. M. Gosselin, *Kinematics and Singularity Analysis of a Novel Type of 3-CRR 3-DOF Translational Parallel Manipulator*, The International Journal of Robotics Research, vol. 21, no. 9, pp. 791-798, September 2002.
- [Kong 02b] X. Kong, C. M. Gosselin, *A Class of 3-DOF Translational Parallel Manipulators with Linear Input-Output Equations*, Workshop on Fundamental Issues and Future Research Directions for Parallel Mechanisms and Manipulators, Quebec City, Canada, October 2002.
- [Kong 03] X. Kong, *Type Synthesis and Kinematics of General and Analytic Parallel Mechanisms*, Thèse de Doctorat, Quebec City, Canada, March 2003.
- [Kosinka 03] A. Kosinka, M. Galicki, K. Kedzior, *Designing and Optimization of Parameters of Delta-4 Parallel Manipulators for a Given Workspace*, Journal of Robotic Systems, vol. 20, no. 9, pp. 539-548, 2003.
- [Krut 03] S. Krut, *Contribution à l'étude des robots pleinement parallèles légers 3T-1R et 3T-2R*, Thèse de doctorat, Université de Montpellier, Novembre 2003.

- [Leguay-Durand 98] S. Leguay-Durand, *Conception et optimisation de mécanismes parallèles à mobilités restreintes*, Thèse de Doctorat, Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, Juin 1998.
- [Liu 04] X. J. Liu, J. Wang, K-K. Oh, J. Kim, *A New Approach to the Design of a DELTA Robot with a Desired Workspace*, Journal of Intelligent and Robotic Systems, vol. 39, pp. 209-225, 2004.
- [Ma91] O. Ma, J. Angeles, *Architecture Singularities of Platform Manipulators*, Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 1542-1547, Sacramento, 1991.
- [Majou 01] F. Majou, P. Wenger, D. Chablat, *The design of Parallel Kinematic Machine Tools using Kinetostatic Performance Criteria*, Proceedings of the 3rd International Conference on Metal Cutting and High Speed Machining, Metz, France, June 2001.
- [Majou 02] Majou, F., Wenger, P., Chablat, D., *Design of a Three-axis Machine Tool for High Speed Machining*, Proceedings of the 4th International Conference on Integrated Design in Manufacturing and Mechanical Engineering, Clermont-Ferrand, France, May 2002.
- [Majou 02a] Majou, F., Wenger, P., and Chablat, D., *Design of Two-DOF Parallel Mechanisms for Machining Applications*, Proceedings of the 8th International Symposium on Advances in Robot Kinematics, Caldes de Malavella, Spain, June 2002.
- [Majou 04] F. Majou, C. Gosselin, P. Wenger, D. Chablat, *Parametric Stiffness Analysis of the Orthoglide*, Proceedings of the 35th International Symposium on Robotics, Paris, March 2004.
- [Merlet 89] Merlet, J-P., *Singular configurations of parallel manipulators and Grassmann geometry*, International Journal of Robotics Research, vol. 8, no.5, pp. 45-56, 1989.
- [Merlet 97] J.-P. Merlet, *DEMOCRAT : a DDesign MethOdology for the Conception of Robots with parallel ArchiTecture*, Robotica, vol 15, no. 4, pp. 367-373, July-August, 1997.
- [Merlet 97a] J.-P. Merlet, *Estimation Efficace des Caractéristiques de Robots Parallèles : Extremums des Raideurs et des Coordonnées, Vitesses, Forces articulaires et Singularités dans un Espace de travail en Translation*, Research Report 3243, INRIA, September 1997.
- [Merlet 98] J-P. Merlet, C. M. Gosselin, N. Mouly, *Workspaces of Planar Parallel Manipulators*, Mechanism and Machine Theory, vol. 33, no. 2, pp. 7-20, 1998.
- [Merlet 00] J-P. Merlet, *Parallel Robots*, Kluwer, 2000.
- [Merlet 00a] Merlet, J-P., *ALIAS : an interval analysis based library for solving and analyzing system of equations*, SEA, June, 2000.
- [Merlet 02] J.-P. Merlet, *The Need for a Systematic Methodology for the Evaluation and Optimal Design of Parallel Manipulators*, 3rd Chemnitz Parallel Kinematics Seminar, Chemnitz, Germany, April 2002.
- [Merlet 02a] J.-P. Merlet, *An Initiative for the Kinematic Study of Parallel Manipulators*, Workshop on Fundamental Issues and Future Research Directions for Parallel Mechanisms and Manipulators, Quebec City, Canada, October 2002.

- [Merlet 02b] J.-P. Merlet, *Optimal Design for the Micro Robot MIPS*, IEEE International Conference on Robotics and Automation, Washington, May 2002.
- [Molinari 97] L. Molinari-Tossati, G. Bianchi, I. Fassi, C. R. Boër, F. Jovane, *An Integrated Methodology for the Design of Parallel Kinematic Machines*, Annals of the CIRP, vol. 46, no. 2, pp. 341-345, 1997.
- [Moore 79] R.E. Moore, *Methods and Applications of Interval Analysis*, SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, USA, 1979.
- [Murray 96] A. P. Murray, F. Pierrot, P. Dauchez, J.M. McCarthy, *On the Design of Parallel Manipulators for a Prescribed Workspace : a Planar Quaternion Approach*, J. Lenarcic and V. Parenti-Castelli Eds, Recent Advances in Robot Kinematics, pp. 349-357, Kluwer, 1996.
- [Neumaier 90] A. Neumaier, *Interval methods for systems of equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [Neumann 88] K.E. Neumann, *Robot*, US Patent 4 732 525, March 22, 1988.
- [Ottaviano 02] E. Ottaviano, M. Ceccarelli, *Optimum design of parallel manipulators for workspace and singularity performances*, Workshop on Fundamental Issues and Future Research Directions for Parallel Mechanisms and Manipulators, Quebec City, Canada, October 2002.
- [Parenti-Castelli 02] V. Parenti-Castelli, S. Venanzi, *On the Joint Clearance Effects in Serial and Parallel Manipulators*, Workshop on Fundamental Issues and Future Research Directions for Parallel Mechanisms and Manipulators, Quebec City, Canada, October 2002.
- [Patel 97] A. J. Patel, K. F. Ehmann, *Volumetric Error Analysis of a Stewart Platform-Based Machine Tool*, Annals of the CIRP, vol. 46, no. 1, 1997.
- [Pierrot 91] F. Pierrot *Robots pleinement parallèles légers : conception, modélisation et commande*, Thèse de Doctorat, Université Montpellier II, 1991.
- [Pierrot 98] F. Pierrot, T. Shibukawa, *From Hexa to HexaM*, IPK'98, International Parallel Kinematic Colloquium, pp 75-84, Zürich, June 1998.
- [Pierrot 99] F. Pierrot, O. Company, *H4 : a New Family of 4-DOF Parallel Robots*, Proceedings of the IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics, September 1999, Atlanta, USA.
- [Pritschow 97] G. Pritschow, K.-H. Wurst, *Systematic Design of Hexapods and Other Parallel Link Systems*, Annals of the CIRP, vol. 46, no. 1, pp 291-295, 1997.
- [Pritschow 00] G. Pritschow, *Parallel Kinematic Machines - Limitations and New Solutions*, Annals of the CIRP, vol. 49, no. 1, pp 275-280, 2000.
- [Ranjbaran 96] F. Ranjbaran, J. Angeles, A. Kecskemethy, *On the Kinematic Conditioning of Robotic Manipulators*, International Conference on Robotics and Automation, Minneapolis, USA, 1996.
- [Rao 03] A. B. Koteswara Rao, P. V. M. Rao, S. K. Saha, *Workspace and Dexterity Analyses of Hexaslide Machine Tools*, Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation, Taipei, Taiwan, September 2003.

- [Ratscheck 95] Ratscheck, H. and Rokne, J., *Interval methods*, Handbook of global optimization, Kluwer, Horst, R. and Pardalos, P.M. Editors, pp. 751–819, 1995.
- [Rehsteiner 98] Rehsteiner F., Neugebauer R., Spiewak S., Wieland F., *Putting parallel kinematics machines to productive work*, Annals of CIRP, Vol. 48, no. 1, pp. 345-350, 1999.
- [Renaud 03] P. Renaud, *Apport de la vision pour l'identification géométrique de mécanismes parallèles*, Thèse de doctorat, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, Septembre 2003.
- [Ryu 98] S.J. Ryu, C.B. Park, H.S. Cho, K.H. Lee, Y.H. Lee, F.C. Park, J.W. Kim, *Eclipse : an Overactuated Parallel Mechanism for Rapid Machining*, Proc. ASME IMECE Symposium on Machine Tools, pp. 681-689, 1998.
- [Siciliano 99] B. Siciliano, *The Tricept robot : inverse kinematics, manipulability analysis and closed-loop direct kinematics algorithm*, Robotica, vol. 17, pp. 437-445, 1999.
- [Simaan 03] Simaan N. and and Shoham M., *Stiffness Synthesis of a Variable Geometry Six-Degrees-of-Freedom Double Planar Parallel Robot*, International Journal of Robotics Research, vol. 22, no. 9, pp 757-757, September 2003.
- [Stewart 65] D. Stewart, *A Platform with Six Degrees of Freedom*, Proceedings of the IMechE, vol. 180, no. 15, pp. 371-385, 1965.
- [Stock 03] M. Stock, K. Miller, *Optimal Kinematic Design of Spatial Parallel Manipulators : Application to Linear Delta Robot*, ASME Journal of Mechanical Design, vol. 125, pp. 292-301, June 2003.
- [Thusty 99] J. Thusty, J. Ziegert, S. Ridgeway, *Fundamental Comparison of the Use of Serial and Parallel Kinematics for Machine Tools*, Annals of the CIRP, vol. 48., no. 1, pp 351-356, 1999.
- [Toyoama 98] T. Toyoama et al., *Machine Tool Having Parallel Structure*, US Patent 5 715 729, February 10, 1998.
- [Tremblay 99] A. Tremblay, L. Baron, *Geometrical Synthesis of Star-Like Topology Parallel Manipulators with a Genetic Algorithm*, Proc. of the IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 2446-2451, Detroit, Michigan, May 1999.
- [Treib 98] Treib T. , Zirn O., *Similarity Laws of Serial and Parallel Manipulators for Machine Tools*, Proceedings of the International Seminar on Improving Machine Tool Performance, Vol. 1, pp 125-131, 1998.
- [Tsai 99] , *Robot Analysis : The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators*, John Wiley and Sons, New-York, N-Y, 1999.
- [Tsai 00] L.-W. Tsai, S. Joshi, *Kinematics and Optimization of a Spatial 3-UPU Parallel Manipulator*, Journal of Mechanical Design, vol. 122, pp 439-446, december 2000.
- [Vischer 00] P. Vischer, R. Clavel, *Argos : A Novel 3-DOF Parallel Wrist mechanism*, The International Journal of Robotics Research, Vol. 19, No. 1, pp. 5-11, January 2000.
- [Wenger 99] P. Wenger, C. M. Gosselin, B. Maillé, *A Comparative Study of Serial and Parallel Mechanism Topologies for Machine Tools*, Proceedings of PKM'99, pp 23-32, Milano, 1999.

- [Wenger 00] P. Wenger, D. Chablat, *Kinematic Analysis of a New Parallel Machine Tool*, Proceedings of the 7th International Symposium on Advances in Robot Kinematics, Piran-Portoroz, Slovenia, June 2000.
- [Wenger 01] P. Wenger, C. Gosselin, D. Chablat, *A comparative study of parallel kinematic architectures for machining applications*, 2nd Workshop on Computational Kinematics, Seoul, South Korea, 2001.
- [Xi 01] Fenfeng Xi, *A comparison study on hexapods with fixed-length legs*, International Journal of Machine Tools and Manufacture, vol. 41, pp. 1735-1748, 2001.
- [Yoon 02] W.-K. Yoon, T. Suehiro, Y. Tsumaki, M. Uchiyama, *A Method for Analyzing Parallel Mechanism Stiffness including Elastic Deformations in the Structure*, International Conference on Intelligent Robots and Systems, Lausanne, Switzerland, October 2002.
- [Yoshikawa 85] T. Yoshikawa, *Manipulability of Robot Mechanisms*, The Int. Journal of Robotics Research, no. 2, vol. 4, pp. 3-9, 1985.
- [Zhang 00] D. Zhang, *Kinetostatic Analysis and Optimization of Parallel and Hybrid Architectures for Machine Tools*, Ph.D Thesis, Université Laval, April 2000.
- [Zhang 02] D. Zhang, Z. Xu, C. M. Mechefske, F. Xi, *Design Optimization of Parallel Kinematic Toolheads with Genetic Algorithms*, 3rd Parallel Kinematic Seminar, Chemnitz, April 2002.
- [Zlatanov 94] D. Zlatanov, R. G. fenton, B. Benhabib, *Singularity analysis of mechanism and Robots via a Velocity Equation Model of the Instantaneous Kinematics*, Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 986-991, San Diego, 1994.
- [Zlatanov 98] D. Zlatanov, *Generalized Singularity Analysis of Mechanisms*, PhD Thesis, University of Toronto, Canada, 1998.
- [Zlatanov 01] D. Zlatanov, I. Bonev, C. Gosselin, *Constraint singularities*, Web review, www.parallemic.org/Reviews/Review005.html, Laboratoire de robotique de l'Université Laval, Canada, 2001.
- [Zlatanov 02] D. Zlatanov, I. A. Bonev, C. M. Gosselin, *Constraint singularities as Configuration Space Singularities*, Web review, <http://www.parallemic.org/Reviews/Review008.html>, Laboratoire de robotique de l'Université Laval, Canada, 2002.
- [Orthoglide Web Site] www.irccyn.ec-nantes.fr/~wenger/Orthoglide, Orthoglide Web site, June 2002.

Annexe A

Occurrence de configurations isotropes pour les PKM à translations munies de liaisons actionnées prismatiques

Cette annexe est une contribution qui n'est pour l'instant pas directement reliée aux travaux du chapitre 3. Elle rassemble des résultats sur l'occurrence de configurations isotropes pour les PKM à translations étudiées dans le chapitre 3. L'isotropie a un lien avec la notion d'EDR car une configuration isotrope peut être considérée comme un "pôle" homogénéisant les performances cinéostatiques d'une PKM.

Nous allons caractériser les configurations isotropes et lorsque c'est possible les continuum d'isotropie de certaines des PKM planes et spatiales analysées dans le chapitre 3.

A.1 Le Biglide

Le Biglide possède tout un continuum d'isotropie : c'est une trajectoire continue le long de laquelle le conditionnement de la matrice Jacobienne vaut 1 (Fig A.1).

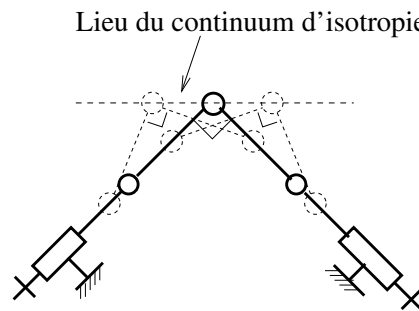


FIG. A.1 – Continuum d'isotropie du Biglide

Les deux FAV sont égaux le long du continuum, mais ils ne sont pas constants [Angeles 2003]. Cela signifie que $\lambda_1 = \lambda_2$, et donc le conditionnement $\kappa(\mathbf{J})$ vaut 1. La variation des FAV le long du continuum est limitée (Fig. A.2), ce qui est intéressant car cela montre que l'isotropie homogénéise les performances cinéostatiques [Majou 02a]. Inclure la plus grande partie possible de ce continuum dans l'EDR peut aider à déterminer le positionnement optimal de l'EDR.

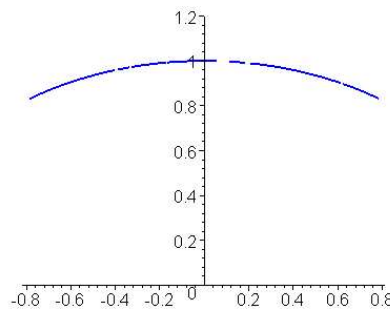


FIG. A.2 – FAV le long du continuum d'isotropie

Deux autres PKM planes dérivées du Biglide possèdent un continuum d'isotropie. Chaque continuum vérifie, comme le Biglide ci-dessus, les deux conditions énoncées dans [Wenger 00] et rappelées dans le paragraphe 3.1.2 : d'une part l'angle entre l'axe de la liaison prismatique actionnée et la barre mobile doit être le même pour chaque jambe, d'autre part l'angle entre les deux barres doit valoir $\pi/2$.

On a représenté sur la Fig. A.3 les continuum d'isotropie du Biglide 2 et du Biglide 3.

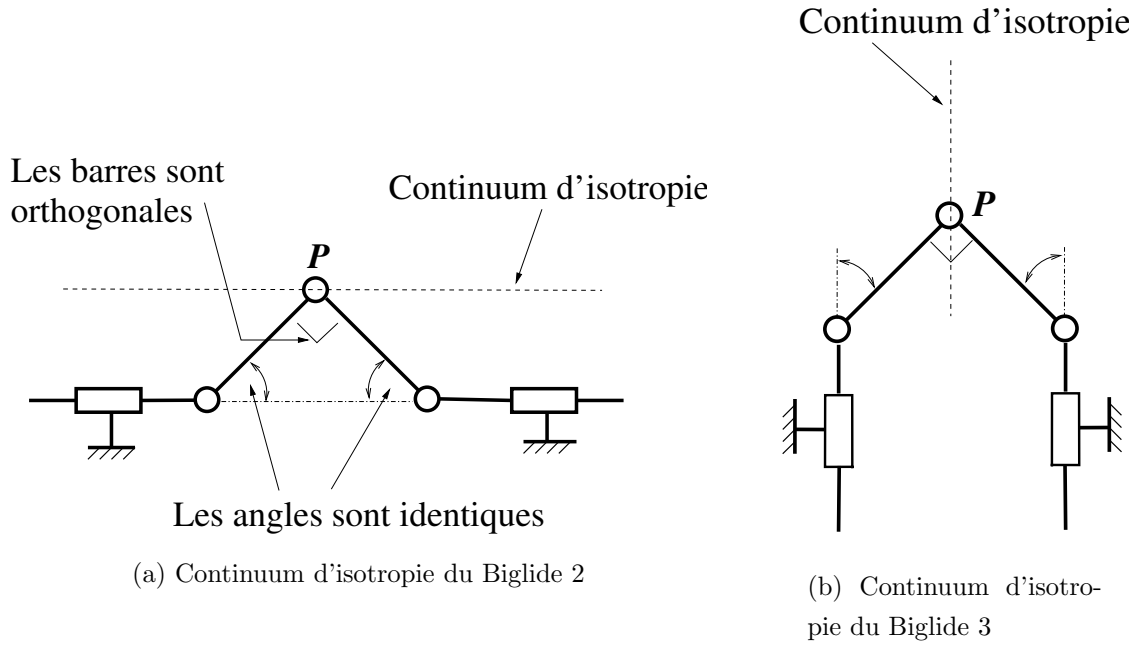


FIG. A.3 – Continuum d'isotropie du Biglide 2 et du Biglide 3

A.2 L'Orthoglide

Dans [Wenger 00], on décrit les conditions permettant d'obtenir une configuration isotrope pour une PKM à translations de type Delta linéaire, en prenant l'Orthoglide pour exemple : l'angle entre l'axe de la liaison prismatique actionnée \mathbf{T}_i (voir Fig. 3.2) et l'axe du parallélogramme \mathbf{W}_i doit être le même pour chaque jambe i , et les vecteurs \mathbf{W}_i de chaque jambe doivent être orthogonaux les uns aux autres.

Contrairement au Biglide qui possède tout un continuum, l'Orthoglide possède une seule configuration isotrope correspondant aux spécifications décrites dans [Wenger 00]. Nous allons le démontrer.

À l'isotropie, soient les points A, B, C les points d'attache des parallélogrammes aux liaisons prismatiques actionnées. On schématise cette configuration sur la Fig. A.4.

On veut savoir si les points A $(x_A, 0, 0)$, B $(0, y_B, 0)$ et C $(0, 0, z_C)$ du tétraèdre $PABC$ (P est confondu avec O à l'isotropie) peuvent se déplacer le long des axes X, Y et Z tout en conservant $(PA) \perp (PB)$, $(PA) \perp (PC)$, $(PB) \perp (PC)$ et $\|PA\| = \|PB\| = \|PC\| = L\sqrt{(2)}/2$.

Supposons que le point C se déplace selon l'axe Z et devienne $C'(0, 0, z'_C)$.

Si $z'_C > z_C$, alors si on suppose que $B'C' = \sqrt{z'^2_C + y'^2_B} = L$, alors on a $y'_B < y_B$

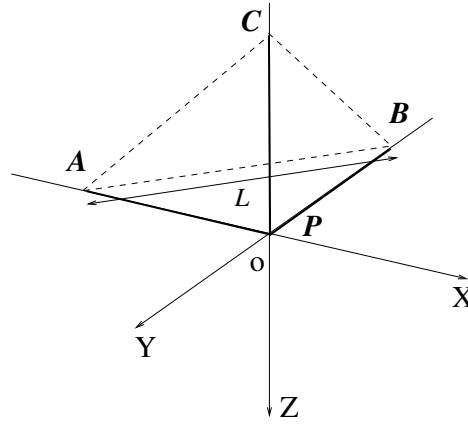


FIG. A.4 – Schéma de l’Orthoglide à l’isotropie

De même si $z'_C > z_C$, alors si on suppose que $A'C' = \sqrt{z_C'^2 + x_A'^2} = L$, on obtient $x'_A < x_A$

D’où l’on obtient $B'A' = \sqrt{x_A'^2 + y_B'^2} < L$, donc les conditions nécessaires pour que la nouvelle configuration du tétraèdre $PABC$ soit une configuration isotrope pour l’Orthoglide ne sont pas respectées.

On peut mener le même raisonnement si $z'_C < z_C$, on aboutira à $B'A' = \sqrt{x_A'^2 + y_B'^2} > L$.

Il est donc impossible de déplacer le tétraèdre $PABC$ tel que l’Orthoglide reste en configuration isotrope. L’Orthoglide possède donc une seule configuration isotrope. Cette configuration étant à notre sens un “pôle homogénéisant” pour les FAV, on comprend que le plus grand EDR cubique prescrit dans [Chablat 03] soit quasiment centré sur cette configuration.

A.3 Le Y-Star

Le cas de la PKM Y-Star est géométriquement semblable à celui de l’Orthoglide : par un raisonnement analogue à celui que l’on vient de mener, on montrerait que cette PKM possède une seule configuration isotrope.

A.4 L’UraneSX

Dans le cas de l’UraneSX, il peut exister une configuration isotrope respectant les conditions décrites dans [Wenger 00], cela dépend du rayon R du cylindre le long duquel se déplacent les jambes.

Sur la Fig. A.5, on a schématisé l'UraneSX en configuration isotrope, en vue de côté et en vue de dessus. Si une configuration isotrope existe, alors l'angle entre l'axe de la prismatique et l'axe du parallélogramme est le même pour chaque jambe. Une configuration isotrope est donc nécessairement située sur l'axe de révolution du cylindre de rayon R . Par conséquent si cette configuration existe, alors il existera tout un continuum d'isotropie passant par cette configuration. Ce continuum sera une droite parallèle aux axes des liaisons actionnées, un peu comme pour le Biglide 3.

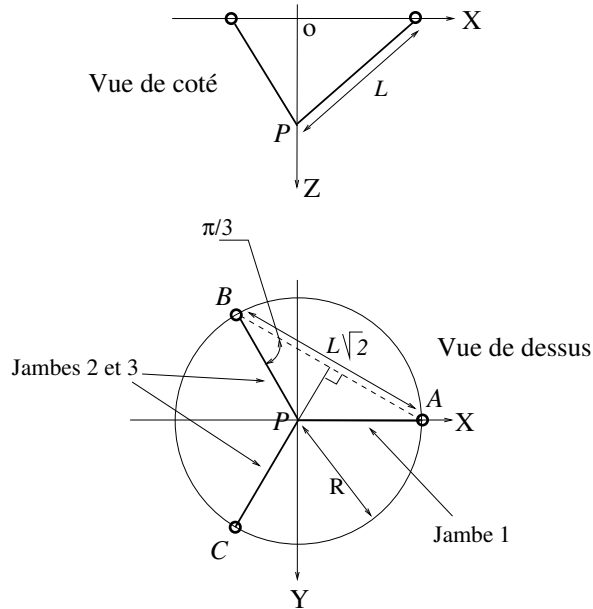


FIG. A.5 – Schéma de l'Urane à l'isotropie

Cherchons maintenant à quelles conditions l'UraneSX possède un continuum d'isotropie.

Si L est la longueur des barres des parallélogrammes, et si une configuration isotrope existe, alors d'après [Wenger 00] on a $(PA) \perp (PB)$, $(PA) \perp (PC)$, $(PB) \perp (PC)$, et donc :

$$\begin{aligned} 2R \cos(\pi/6) &= L\sqrt{2}/2 \\ \Rightarrow R &= L\sqrt{2/3} = 0.82L \end{aligned}$$

Il faut donc : $R = 0.82L$

Le prototype de l'UraneSX respecte le critère d'encombrement de l'industrie Européenne automobile : l'empreinte au sol ne doit pas dépasser 1.6 m de large [Company 02]. L'orientation du prototype est telle que son empreinte au sol vaut $2R$.

Les dimensions du prototype sont $L = 1.3m$ et $R = 7/13 * L = 0.7$. On a donc bien $2R < 1.6$, le critère d'encombrement est respecté. Par contre on a $R = 1.066 < 0.82 * 1.3$. Le prototype ne possède donc pas de continuum d'isotropie.

D'une certaine façon, c'est un avantage. En effet, dans le paragraphe 3.5.4.1, on montre

dans le Tab. 3.5 que lorsque R augmente, le volume de l'EDR cubique diminue, et donc par conséquent l'indice $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$. Cet exemple montre que la présence d'une configuration isotrope n'est pas une condition nécessaire pour posséder un bon ratio $\mathcal{W}_{DR}/\mathcal{W}$, même si la moyenne des bornes imposées aux FAV dans l'EDR vaut 1, comme c'est le cas dans le paragraphe 3.5.4.1.

A.5 Le 3-UPU

Les conditions exposées dans [Wenger 00] ne sont pas applicables au 3-UPU. Il existe une configuration isotrope mais on ne peut pas la détecter avec ces conditions.

Annexe B

Influence de l'hyperstatisme sur la rigidité de l'Orthoglide

Dans cette annexe nous allons montrer que l'hyperstatisme a peu d'influence sur la rigidité torsionnelle de l'Orthoglide, et donc que le modèle de rigidité utilisé dans le chapitre 4 basé sur un Orthoglide isostatique est réaliste.

Considérons par exemple un Orthoglide hyperstatique sur lequel seul un couple est appliqué selon l'axe Y , dans la configuration isotrope. Dans ce cas seules deux jambes sont sollicitées et, lorsque les actionneurs sont bloqués on peut assimiler la structure à celle représentée sur la Fig. B.1. En effet, les liaisons cinématiques de type pivot constituant le parallélogramme déformable sont considérées rigides car elles ne font que transmettre le couple T . Quant aux liaisons élastiques liées au pied...

Le problème qui se pose est de savoir comment se répartit le couple entre la jambe 1 et la jambe 2.

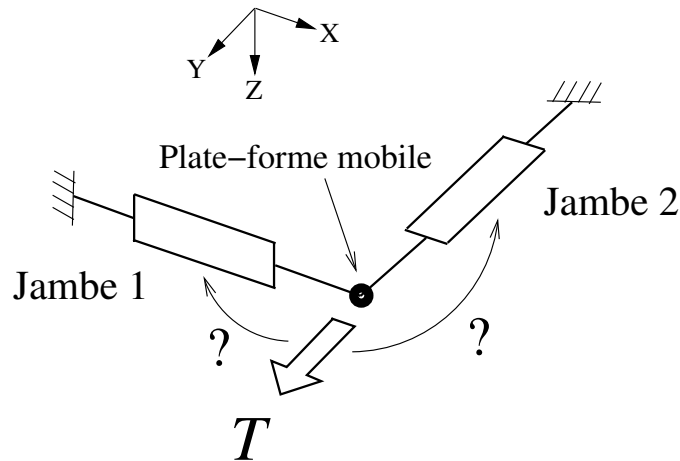


FIG. B.1 – Structure simplifiée de l'Orthoglide hyperstatique lorsque seul un couple est appliqué

Modélisons tout d'abord pour chaque jambe la flexibilité torsionnelle liée au parallélogramme : une liaison élastique virtuelle L_1 correspondant à la flexibilité de la jambe 1 sollicitée par le couple, et une liaison élastique virtuelle L_2 correspondant à la flexibilité de la jambe 2 sollicitée par le couple (Fig.B.2).

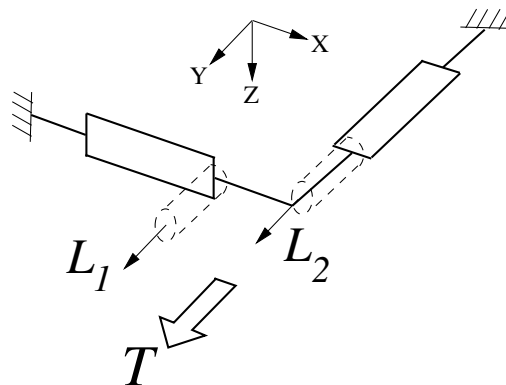


FIG. B.2 – Flexibilités des parallélogrammes de la jambe 1 et de la jambe 2

Soit k_1 la raideur associée à la flexibilité du parallélogramme de la jambe 1, on l'a déjà calculée au paragraphe 4.2.3, c'est la flexibilité du parallélogramme en tension différentielle,

qui vaut à l'isotropie :

$$k_1 = \frac{ES_B d^2}{2L_B}$$

Soit k_2 la raideur associée à la flexibilité du parallélogramme de la jambe 2, c'est la flexibilité du parallélogramme en flexion différentielle (Fig. B.3).

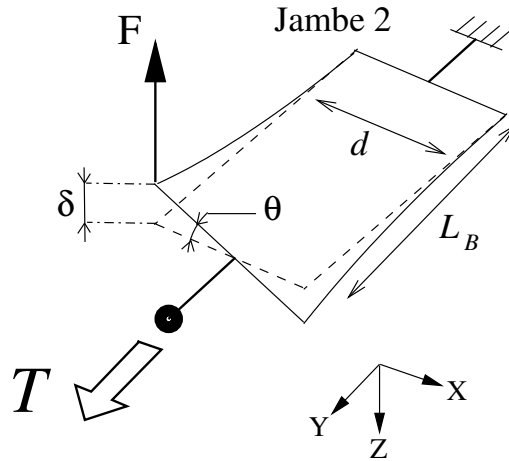


FIG. B.3 – Flexibilité en flexion différentielle du parallélogramme de la jambe 2

Pour calculer k_2 , il faut connaître la relation entre la flèche δ et le couple T . D'après les lois et modèles de la RdM, on a :

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{FL_B^3}{3EI_B} \\ \text{avec } F &= \frac{T}{d} \\ \text{or on a } \theta &\simeq \frac{\delta}{d/2} \\ \text{donc on a } \theta &\simeq \frac{2TL_B^3}{3EI_B d^2} \end{aligned}$$

On obtient la raideur torsionnelle k_2 :

$$\begin{aligned} k_2 &= \frac{T}{\theta} \\ &\simeq \frac{3EI_B d^2}{2L_B^3} \end{aligned}$$

On suppose la plate-forme mobile infiniment rigide par rapport aux autres membrures. Dans ce cas, le couple T se répartit entre la jambe 1 et la jambe 2 de telle façon que la rotation de la plate-forme mobile provoquée par la jambe 2 soit égale à la rotation de la plate-forme mobile provoquée par la jambe 1.

Soient T_1 le couple transmis par la jambe 1 et T_2 le couple transmis par la jambe 2, tels que $T_1 + T_2 = T$. Comme la rotation de la plate-forme mobile due à la jambe 1 est égale à celle due à la jambe 2, on a :

$$\begin{aligned} \frac{T_1}{k_1} &= \frac{T_2}{k_2} \\ \text{c'est-à-dire } \frac{T_1}{T_2} &= \frac{k_1}{k_2} \\ &\simeq \frac{L_B^2 S_B}{3I_B} \end{aligned}$$

Avec les paramètres géométriques du prototype, l'application numérique donne :

$$\frac{T_1}{T_2} \simeq 2669$$

On a donc à l'isotropie :

$$T_1 \gg T_2$$

C'est-à-dire que c'est la jambe 1 qui encaisse presque tout le couple T . L'hyperstatisme de l'Orthoglide ne change donc presque rien à la rigidité de l'Orthoglide.

Ce résultat est valable à l'isotropie. Pour le valider ailleurs dans l'EDR, il faut prendre en compte le fait que k_1 et k_2 dépendent de la position Cartésienne. En effet on a (voir Fig. 4.9 pour les paramètres) :

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{ES_B d^2 \cos(\beta)}{2L_B} \\ \text{et } k_2 &\simeq \frac{3EI_B d^2}{2L_B^3 \cos^2(\beta) \cos^2(\theta)} \end{aligned}$$

Et donc :

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{L_B^2 S_B \cos^3(\beta) \cos^2(\theta)}{3I_B}$$

Dans l'EDR déterminé dans [Chablat 03], on a au maximum :

$$-20 \text{ deg} \leq \beta \leq +20 \text{ deg} \quad -20 \text{ deg} \leq \theta \leq +20 \text{ deg}$$

C'est-à-dire que dans le pire des cas on a :

$$\frac{T_1}{T_2} \simeq 1955$$

Le raisonnement effectué à l'isotropie reste valable car on conserve bien :

$$T_1 \gg T_2$$

Annexe C

Expressions symboliques des κ_{ij}

L'analyse paramétrique de la rigidité de l'Orthoglide a été menée à partir de la matrice de compliance obtenue sous forme symbolique. En un point quelconque de l'espace de travail, les éléments de cette matrice ne sont pas visualisables tels quels car leur expression symbolique occupe plusieurs pages. Dans cette annexe nous donnons des exemples d'expressions symboliques pour illustrer cela. Ces expressions ont été simplifiées au maximum à l'aide du logiciel MAPLE.

C.1 Simplification des expressions symboliques

Pour simplifier le calcul des expressions symboliques des éléments κ_{ij} de la matrice de compliance avec le logiciel MAPLE, nous avons utilisé des astuces simples. Nous pensons qu'elles peuvent être utiles pour d'autres analyses paramétriques de rigidité de PKM. C'est pourquoi nous les mentionnons dans cette annexe.

Nous avons par exemple utilisé les termes $P_{12} = \sqrt{L_B^2 - x^2 - y^2}$, $P_{23} = \sqrt{L_B^2 - y^2 - z^2}$, $P_{13} = \sqrt{L_B^2 - x^2 - z^2}$, $P_1 = \sqrt{L_B^2 - x^2}$, $P_2 = \sqrt{L_B^2 - y^2}$, et $P_3 = \sqrt{L_B^2 - z^2}$ pour faciliter les calculs et les simplifications automatiques sous MAPLE. Ces termes P_i ou P_{ij} apparaissent à de nombreuses reprises dans le modèle géométrique de l'Orthoglide.

Nous avons également séparé la simplification du numérateur $N_{\kappa_{ij}}$ et du dénominateur $D_{\kappa_{ij}}$ de chaque élément κ_{ij} . Les temps de calcul sous MAPLE s'en trouvent largement réduits. Nous avons simplifié $N_{\kappa_{ij}}$ et $D_{\kappa_{ij}}$ en utilisant notamment la fonction MAPLE *factor* qui a permis de réduire considérablement le volume des expressions symboliques.

Nous allons d'ailleurs présenter trois exemples d'expressions symboliques d'éléments κ_{ij} afin de montrer jusqu'à quel volume ces expressions, même simplifiées, peuvent parvenir et pourquoi il est alors impossible de les visualiser telles quelles.

C.2 Trois exemples d'expressions symboliques des κ_{ij}

C.2.1 Expressions les moins volumineuses

Les expressions symboliques les moins volumineuses sont celles des éléments κ_{11} , κ_{22} , κ_{33} . Nous présentons l'expression de κ_{11} à titre d'exemple :

$$\begin{aligned} \kappa_{11}(x, y, z, P_1, P_2, P_3, P_{12}, P_{13}, P_{23}, L_f, h_f, b_f, \lambda, d, L_B, S_B, e, k_{act}, E_{alu}) = \\ -2/5 * (5h_f^3 L_B^2 b_f^3 + 5h_f L_B^2 b_f^5 + 45d^2 S_B \cos(\lambda)^2 L_f P_2 h_f^2 + 78d^2 S_B b_f^2 L_f P_2 - \\ 33b_f^2 d^2 S_B \cos(\lambda)^2 L_f P_2)(2x^2 z^4 - 2P_{23} P_{12} y^2 z x + 2P_{23} P_{13} x y L_B^2 - 2P_{23} P_{13} y^3 x - 2P_{23} P_{13} y x^3 - \\ 2P_{23} P_{12} x z^3 - 2P_{23} P_{12} x^3 z + 2L_B^2 L_B^2 z^2 - L_B^2 z^4 - 2z y^3 P_{12} P_{13} - 2z^3 y P_{12} P_{13} - 3L_B^2 x^2 z^2 - \\ 2y^2 x^2 z^2 + L_B^4 y^2 - L_B^2 y^4 + L_B^4 x^2 - L_B^2 x^4 + 2x^4 z^2 + 2y^2 x^4 + 2y^4 x^2 - 3L_B^2 z^2 y^2 - 2L_B^2 x^2 y^2 + \\ L_B^2 x^2 L_B^2 + L_B^2 L_B^2 y^2 - L_B^2 L_B^4 - L_B^2 z^2 y^2 - 2L_B^2 x^2 y^2 + 2z^2 y^4 - L_B^2 x^2 z^2 + 2z^4 y^2 + 2P_{23} P_{12} x z L_B^2 - \\ 2P_{13} P_{12} z y x^2 - 2P_{23} P_{13} y x z^2 + 2P_{13} P_{12} z y L_B^2 - 4x z y P_{23} P_{13} P_{12} + 4y^2 x z^2 P_{23} + 4y x^2 z^2 P_{13} + \\ 4y^2 z x^2 P_{12}) / (h_f E_{alu} b_f^3 S_B d^2 P_2 (b_f^2 + h_f^2) (-y z P_{23} + 2y z x - P_{13} z x - P_{12} x y + P_{12} P_{13} P_{23})^2) \end{aligned}$$

C.2.2 Moyennement volumineuses

Les expressions de κ_{14} , κ_{15} , κ_{16} , κ_{24} , κ_{25} , κ_{26} , κ_{34} , κ_{35} , κ_{36} sont un peu plus volumineuses que celles de κ_{11} , κ_{22} , κ_{33} . Nous présentons l'expression de κ_{14} à titre d'exemple :

$$\begin{aligned}
& \kappa_{14}(x, y, z, P_1, P_2, P_3, P_{12}, P_{13}, P_{23}, L_f, h_f, b_f, \lambda, d, L_B, S_B, e, k_{act}, E_{alu}) = \\
& -2/5 * yz(-5P_{23}b_f^5eP_{13}L_{B_3}^2h_fy^2 - 15xy^2b_f^2d^2S_B\cos(\lambda)L_f^2P_{23}P_2 + \\
& 135d^2S_B\cos(\lambda)^2eL_fP_{23}P_2yzh_f^2x + 30d^2S_B\cos(\lambda)L_f^2P_2y^2zh_f^2x + 5b_f^3eP_{23}P_{23}L_{B_3}^2h_f^3z^2 + \\
& 5b_f^5eP_{13}P_{23}L_{B_3}^2xh_fy + 5b_f^5eP_{23}P_{23}L_{B_3}^2x^2h_f - 5b_f^5eP_{23}P_{23}L_{B_3}^2h_fyz + 5b_f^5eP_{23}P_{23}L_{B_3}^2h_fz^2 - \\
& 5b_f^5eP_{23}P_{23}L_{B_3}^2h_fL_B^2 - 5b_f^3eP_{23}P_{23}L_{B_3}^2h_f^3L_B^2 - 5P_{23}b_f^3eP_{13}L_{B_3}^2h_f^3x^2 - 5P_{23}b_f^3eP_{13}L_{B_3}^2y^2h_f^3 + \\
& 5P_{23}b_f^3eP_{13}L_{B_3}^2yzh_f^3 + 5P_{23}b_f^5eP_{13}L_{B_3}^2h_fyz - 5P_{23}b_f^5eP_{13}L_{B_3}^2x^2h_f - 78d^2S_Bb_f^2eP_{23}L_fP_{13}P_{23}P_2z + \\
& 234d^2S_Bb_f^2eL_fP_{23}P_2yzx + 78d^2S_Bb_f^2eL_fP_{23}P_2yz^2 - 78d^2S_Bb_f^2eL_fP_{23}P_2xy^2 - \\
& 234d^2S_Bb_f^2eL_fP_{13}P_2yzx + 78d^2S_Bb_f^2eL_fP_2x^3y - 78d^2S_Bb_f^2eP_{23}L_fP_{13}P_2y^2 - \\
& 78d^2S_Bb_f^2eP_{23}L_fP_{23}P_2L_B^2 + 78d^2S_Bb_f^2eP_{23}L_fP_{23}P_2z^2 + 78d^2S_Bb_f^2eP_{23}L_fP_{23}P_2x^2 - \\
& 78d^2S_Bb_f^2eL_fP_2xz^3 + 78d^2S_Bb_f^2eP_{23}L_fP_{13}P_2L_{B_3}^2 + 5b_f^3eP_{13}P_{23}L_{B_3}^2xh_f^3y - 5b_f^3eP_{13}P_{23}L_{B_3}^2xh_f^3z + \\
& 78d^2S_Bb_f^2eL_fP_{13}P_2xz^2 + 15xh_f^2yd^2S_B\cos(\lambda)L_f^2P_{13}P_{23}P_2 + 15yh_f^2d^2S_BP_{23}\cos(\lambda)L_f^2P_{13}P_{23}P_2 - \\
& 5b_f^3eP_{23}P_{23}L_{B_3}^2yzh_f^3 + 5b_f^3eP_{23}P_{23}L_{B_3}^2h_f^3x^2 + 15yb_f^2d^2S_BP_{23}\cos(\lambda)L_f^2P_{13}P_{23}P_2 - \\
& 99b_f^2d^2S_B\cos(\lambda)^2eL_fP_{23}P_2yzx + 33b_f^2d^2S_B\cos(\lambda)^2L_fP_2zx^3 - 15b_f^2d^2S_B\cos(\lambda)L_f^2P_{23}P_{23}P_2L_B^2 - \\
& 33b_f^2d^2S_B\cos(\lambda)^2L_fP_2x^3y + 15b_f^2d^2S_B\cos(\lambda)L_f^2P_{23}P_{23}P_2x^2 - 15xh_f^2y^2d^2S_B\cos(\lambda)L_f^2P_{23}P_2 - \\
& 15y^2zh_f^2d^2S_BP_{23}\cos(\lambda)L_f^2P_2 - 15y^2zb_f^2d^2S_BP_{23}\cos(\lambda)L_f^2P_2 + 15d^2S_B\cos(\lambda)L_f^2P_2xh_f^2zL_B^2 - \\
& 15d^2S_B\cos(\lambda)L_f^2P_2zh_f^2x^3 - 15d^2S_B\cos(\lambda)L_f^2P_2xh_f^2z^3 + 33b_f^2d^2S_B\cos(\lambda)^2L_fP_2xyL_{B_3}^2 - \\
& 66b_f^2d^2S_B\cos(\lambda)^2L_fP_2y^2zx + 66b_f^2d^2S_B\cos(\lambda)^2L_fP_2yxyz^2 - 33b_f^2d^2S_B\cos(\lambda)^2L_fP_2xzL_B^2 + \\
& 33b_f^2d^2S_B\cos(\lambda)^2eL_fP_{23}P_2xy^2 - 45d^2S_B\cos(\lambda)^2eL_fP_{23}P_2xh_f^2y^2 - 78d^2S_Bb_f^2eP_{23}L_fP_{23}P_2yz - \\
& 15b_f^2d^2S_B\cos(\lambda)L_f^2P_2zx^3 + 45d^2S_BeP_{23}\cos(\lambda)^2L_fP_{13}P_{23}P_2yh_f^2 + 78d^2S_Bb_f^2eP_{23}L_fP_{13}P_2yz + \\
& 33b_f^2d^2S_B\cos(\lambda)^2L_fP_2xz^3 - 78d^2S_Bb_f^2eL_fP_{13}P_{23}P_2xz - 156d^2S_Bb_f^2eL_fP_2yxyz^2 + \\
& 78d^2S_Bb_f^2eL_fP_{13}P_{23}P_2xy - 78d^2S_Bb_f^2eL_fP_2zx^3 - 78d^2S_Bb_f^2eL_fP_2xyL_{B_3}^2 - \\
& 78d^2S_Bb_f^2eL_fP_{23}P_2y^2z + 78d^2S_Bb_f^2eL_fP_2xy^3 - 78d^2S_Bb_f^2eP_{23}L_fP_{13}P_2x^2 + 156d^2S_Bb_f^2eL_fP_2y^2zx + \\
& 78d^2S_Bb_f^2eL_fP_2xzL_B^2 + 78d^2S_Bb_f^2eP_{23}L_fP_{13}P_{23}P_2y - 45d^2S_BeP_{23}\cos(\lambda)^2L_fP_{23}P_2h_f^2L_B^2 - \\
& 15b_f^2d^2S_B\cos(\lambda)L_f^2P_2xz^3 + 45d^2S_BeP_{23}\cos(\lambda)^2L_fP_{23}P_2h_f^2z^2 + 15d^2S_B\cos(\lambda)L_f^2P_{23}P_{23}P_2h_f^2x^2 - \\
& 33b_f^2P_{23}d^2S_B\cos(\lambda)^2eL_fP_{13}P_2yz - 45d^2S_BeP_{23}\cos(\lambda)^2L_fP_{23}P_2yzh_f^2 + \\
& 45d^2S_BeP_{23}\cos(\lambda)^2L_fP_{23}P_2h_f^2x^2 + 15d^2S_B\cos(\lambda)L_f^2P_{23}P_{23}P_2h_f^2z^2 + \\
& 45P_{23}d^2S_B\cos(\lambda)^2eL_fP_{13}P_2h_f^2L_{B_3}^2 - 90d^2S_B\cos(\lambda)^2eL_fP_2yz^2h_f^2x - \\
& 45d^2S_B\cos(\lambda)^2eL_fP_2xh_f^2yL_{B_3}^2 - 33b_f^2d^2S_BeP_{23}\cos(\lambda)^2L_fP_{23}P_2z^2 - \\
& 33b_f^2P_{23}d^2S_B\cos(\lambda)^2eL_fP_2yz^2 + 33b_f^2d^2S_BeP_{23}\cos(\lambda)^2L_fP_{23}P_2yz - \\
& 45P_{23}d^2S_B\cos(\lambda)^2eL_fP_{13}P_2y^2h_f^2 + 33b_f^2P_{23}d^2S_B\cos(\lambda)^2eL_fP_2y^2z + \\
& 45d^2S_B\cos(\lambda)^2eL_fP_2y^3h_f^2x + 45d^2S_B\cos(\lambda)^2eL_fP_2yh_f^2x^3 - 33b_f^2d^2S_BeP_{23}\cos(\lambda)^2L_fP_{23}P_2x^2 + \\
& 33b_f^2d^2S_BeP_{23}\cos(\lambda)^2L_fP_{23}P_2L_B^2 + 45d^2S_B\cos(\lambda)^2eL_fP_2xh_f^2zL_B^2 - \\
& 33b_f^2d^2S_B\cos(\lambda)^2L_fP_{13}P_2xz^2 + 15b_f^2d^2S_B\cos(\lambda)L_f^2P_{23}P_{23}P_2z^2 - 45d^2S_B\cos(\lambda)^2eL_fP_2zh_f^2x^3 - \\
& 45d^2S_B\cos(\lambda)^2eL_fP_2xh_f^2z^3 + 99b_f^2d^2S_B\cos(\lambda)^2L_fP_{13}P_2yzx + 90d^2S_B\cos(\lambda)^2eL_fP_2y^2zh_f^2x - \\
& 45d^2S_BeP_{23}\cos(\lambda)^2L_fP_{13}P_{23}P_2h_f^2z - 45yzxb_f^2d^2S_B\cos(\lambda)L_f^2P_{13}P_2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 15yzh_f^2d^2S_BP_{23}\cos(\lambda)L_f^2P_{13}P_2 + 15yzb_f^2d^2S_BP_{23}\cos(\lambda)L_f^2P_{13}P_2 - 45yzh_f^2xd^2S_B\cos(\lambda)L_f^2P_{13}P_2 + \\
& 15xyb_f^2d^2S_B\cos(\lambda)L_f^2P_{13}P_{23}P_2 - 33b_f^2d^2S_B\cos(\lambda)^2L_fP_2xy^3 - 45d^2S_BeP_{23}\cos(\lambda)^2L_fP_2y^2zh_f^2 + \\
& 45d^2S_BeP_{23}\cos(\lambda)^2L_fP_2yh_f^2z^2 - 45d^2S_B\cos(\lambda)^2L_fP_{13}P_{23}P_2xh_f^2z - \\
& 135d^2S_B\cos(\lambda)^2L_fP_{13}P_2yzh_f^2x + 15b_f^2d^2S_B\cos(\lambda)L_f^2P_2xzL_B^2 + 33b_f^2d^2S_B\cos(\lambda)^2L_fP_{13}P_{23}P_2xz + \\
& 45d^2S_B\cos(\lambda)^2L_fP_{13}P_{23}P_2xh_f^2y + 33b_f^2d^2S_BeP_{23}\cos(\lambda)^2L_fP_{13}P_{23}P_2z - \\
& 33b_f^2d^2S_B\cos(\lambda)^2L_fP_{13}P_{23}P_2xy + 30b_f^2d^2S_B\cos(\lambda)L_f^2P_2y^2zx - \\
& 33b_f^2d^2S_BeP_{23}\cos(\lambda)^2L_fP_{13}P_{23}P_2y + 33b_f^2P_{23}d^2S_B\cos(\lambda)^2eL_fP_{13}P_2x^2 + \\
& 45d^2S_B\cos(\lambda)^2L_fP_{13}P_2xh_f^2z^2 - 33b_f^2P_{23}d^2S_B\cos(\lambda)^2eL_fP_{13}P_2L_{B_3}^2 + \\
& 33b_f^2P_{23}d^2S_B\cos(\lambda)^2eL_fP_{13}P_2y^2 - 15d^2S_B\cos(\lambda)L_f^2P_{23}P_{23}P_2h_f^2L_B^2 + \\
& 45P_{23}d^2S_B\cos(\lambda)^2eL_fP_{13}P_2yzh_f^2 - 45P_{23}d^2S_B\cos(\lambda)^2eL_fP_{13}P_2h_f^2x^2 - 5b_f^5eP_{13}P_{23}L_{B_3}^2xh_fz + \\
& 5b_f^5eP_{13}L_{B_3}^2xh_fz^2 - 5b_f^5eL_{B_3}^2zx^3h_f - 5b_f^5exh_fyL_{B_3}^4 + 5b_f^3eL_{B_3}^2h_f^3xzL_B^2 - 5b_f^3eL_{B_3}^2h_f^3xz^3 - \\
& 5b_f^3eL_{B_3}^2zh_f^3x^3 - 15b_f^3eP_{13}L_{B_3}^2xh_f^3yz + 5b_f^3eL_{B_3}^2yh_f^3x^3 + 5b_f^3eL_{B_3}^2y^3h_f^3x + 5P_{23}b_f^5eP_{13}h_fL_{B_3}^4 - \\
& 5b_f^3eyh_f^3xL_{B_3}^4 + 5P_{23}b_f^3eP_{13}h_f^3L_{B_3}^4 - 5b_f^5eL_{B_3}^2xh_fz^3 + 5b_f^5eL_{B_3}^2x^3h_fy + 15b_f^5eP_{23}L_{B_3}^2xh_fyz + \\
& 5b_f^5eL_{B_3}^2xh_fy^3 + 15b_f^3eP_{23}L_{B_3}^2xh_f^3yz + 10b_f^3eL_{B_3}^2y^2zh_f^3x - 10b_f^3eL_{B_3}^2yz^2h_f^3x - 15b_f^5eP_{13}L_{B_3}^2xh_fyz - \\
& 5b_f^5eP_{23}L_{B_3}^2h_fy^2z - 5b_f^5eP_{23}L_{B_3}^2xh_fy^2 - 5b_f^3eP_{23}L_{B_3}^2y^2h_f^3x + 5b_f^3eP_{13}L_{B_3}^2xh_f^3z^2 + 5b_f^5eL_{B_3}^2xh_fzL_B^2 + \\
& 5b_f^5eP_{23}L_{B_3}^2h_fy^2z - 5b_f^3eP_{23}L_{B_3}^2y^2zh_f^3 + 5b_f^3eP_{23}L_{B_3}^2yz^2h_f^3 - 5P_{23}b_f^3eP_{13}P_{23}L_{B_3}^2h_f^3z + \\
& 5P_{23}b_f^5eP_{13}P_{23}L_{B_3}^2h_fy + 10b_f^5eL_{B_3}^2zxh_fy^2 - 10b_f^5eL_{B_3}^2xh_fyz^2 + 5P_{23}b_f^3eP_{13}P_{23}L_{B_3}^2yh_f^3 - \\
& 5P_{23}b_f^5eP_{13}P_{23}L_{B_3}^2h_fz)/(h_fE_{alu}b_f^3S_Bd^2P_2(b_f^2+h_f^2)(-yzP_{23}+2yzx-P_{13}zx-P_{23}xy+P_{23}P_{13}P_{23})^2)
\end{aligned}$$

C.2.3 Très volumineuses

Les expressions symboliques les plus volumineuses sont celles des éléments κ_{44} , κ_{55} , κ_{66} , κ_{45} , κ_{46} , κ_{56} . Nous présentons l'expression de κ_{44} à titre d'exemple :

$$\begin{aligned}
& \kappa_{44}(x, y, z, P_1, P_2, P_3, P_{12}, P_{13}, P_{23}, L_f, h_f, b_f, \lambda, d, L_B, S_B, e, k_{act}, E_{alu}) = \\
& 1/10 * (-40d^2S_Bk_{act}b_f^4L_f^3P_2P_1P_3L_B^4y^2 - 80d^2S_Bk_{act}b_f^4L_f^3P_2P_1P_3z^2y^4 - \\
& 80d^2S_Bk_{act}b_f^4L_f^3P_2P_1P_3z^4y^2 - 40d^2S_Bk_{act}b_f^4L_f^3P_2P_1P_3L_B^4x^2 + 40d^2S_Bk_{act}b_f^4L_f^3P_2P_1P_3L_B^2L_B^4 + \\
& 40d^2S_Bk_{act}b_f^4L_f^3P_2P_1P_3L_B^2x^4 + 40d^2S_Bk_{act}b_f^4L_f^3P_2P_1P_3L_B^2x^2z^2 + \\
& 40d^2S_Bk_{act}b_f^4L_f^3P_2P_1P_3L_B^2z^2y^2 + 40d^2S_Bk_{act}b_f^4L_f^3P_2P_1P_3L_B^2x^2y^2 - \\
& 40d^2S_Bk_{act}b_f^4L_f^3P_2P_1P_3L_B^2L_B^2z^2 + 40h_f^2d^2S_Bk_{act}b_f^2L_f^3P_2P_1P_3L_B^2x^4 + \\
& 80d^2S_Bk_{act}b_f^4L_f^3P_{12}P_2P_1P_3z^3y^2 + 40h_f^2d^2S_Bk_{act}b_f^2L_f^3P_2P_1P_3L_B^2L_B^4 - \\
& 40d^2S_Bk_{act}b_f^4L_f^3P_2P_1P_3L_B^2x^2L_B^2 - 40h_f^2d^2S_Bk_{act}b_f^2L_f^3P_2P_1P_3L_B^4y^2 + \\
& 80d^2S_Bk_{act}b_f^4L_f^3P_{13}P_2P_1P_3y^3z^2 - 40h_f^2d^2S_Bk_{act}b_f^2L_f^3P_2P_1P_3L_B^4x^2 + \\
& 120d^2S_Bk_{act}b_f^4L_f^3P_2P_1P_3L_B^2z^2y^2 - 80d^2S_Bk_{act}b_f^4L_f^3P_2P_1P_3y^2x^2z^2 + \\
& 80d^2S_Bk_{act}b_f^4L_f^3P_{13}P_2P_1P_3yx^2z^2 + 80h_f^2d^2S_Bk_{act}b_f^2L_f^3P_{12}P_2P_1P_3z^3y^2 - \\
& 40h_f^2d^2S_Bk_{act}b_f^2L_f^3P_2P_1P_3L_B^2x^2L_B^2 + 120h_f^2d^2S_Bk_{act}b_f^2L_f^3P_2P_1P_3L_B^2z^2y^2 - \\
& 624d^2S_Bk_{act}b_f^2h_f^2e^2L_fP_{13}P_2P_1P_3y^2x^3 + 80h_f^2d^2S_Bk_{act}b_f^2L_f^3P_{13}P_{12}P_2P_1P_3y^3z + \\
& 40h_f^2d^2S_Bk_{act}b_f^2L_f^3P_2P_1P_3L_B^2z^2y^2 - 624d^2S_Bk_{act}b_f^2h_f^2e^2L_fP_2P_1P_3z^3y^3 + \\
& 624d^2S_Bk_{act}b_f^2h_f^2e^2L_fP_2P_1P_3z^4y^2 - 80h_f^2d^2S_Bk_{act}b_f^2L_f^3P_{12}P_2P_1P_3y^2zL_B^2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 624d^2 S_B k_{act} b_f^2 h_f^2 e^2 L_f P_2 P_1 P_3 z^2 y^4 - 80d^2 S_B k_{act} b_f^4 L_f^3 P_{13} P_2 P_1 P_3 L_B^2 y z^2 - \\
& 312d^2 S_B k_{act} b_f^2 h_f^2 e^2 L_f P_2 P_1 P_3 L_B^2 z^4 - 80h_f^2 d^2 S_B k_{act} b_f^2 L_f^3 P_{13} P_2 P_1 P_3 L_B^2 y z^2 - \\
& 624d^2 S_B k_{act} b_f^2 h_f^2 e^2 L_f P_{13} P_2 P_1 P_3 y^4 x + 80d^2 S_B k_{act} b_f^4 L_f^3 P_{13} P_{12} P_2 P_1 P_3 y^3 z + \\
& 80d^2 S_B k_{act} b_f^4 L_f^3 P_{12} P_2 P_1 P_3 y^2 z x^2 - 80d^2 S_B k_{act} b_f^4 L_f^3 P_{12} P_2 P_1 P_3 y^2 z L_B^2 + \\
& 624d^2 S_B k_{act} b_f^2 h_f^2 e^2 L_f P_{13} P_2 P_1 P_3 z^3 y^2 + 40h_f^2 d^2 S_B k_{act} b_f^2 L_f^3 P_2 P_1 P_3 L_B^2 x^2 y^2 + \\
& 80h_f^2 d^2 S_B k_{act} b_f^2 L_f^3 P_{13} P_2 P_1 P_3 y x^2 z^2 + 312d^2 S_B k_{act} b_f^2 h_f^2 e^2 L_f P_2 P_1 P_3 L_B^2 L_B^2 z^2 - \\
& 312d^2 S_B k_{act} b_f^2 h_f^2 e^2 L_f P_2 P_1 P_3 L_B^2 x^2 y^2 + 80d^2 S_B k_{act} b_f^4 L_f^3 P_{13} P_{12} P_2 P_1 P_3 z^3 y - \\
& 312d^2 S_B k_{act} b_f^2 h_f^2 e^2 L_f P_2 P_1 P_3 L_B^2 y^4 - 312d^2 S_B k_{act} b_f^2 h_f^2 e^2 L_f P_2 P_1 P_3 L_B^2 x^2 z^2 - \\
& 624d^2 S_B k_{act} b_f^2 h_f^2 e^2 L_f P_{13} P_2 P_1 P_3 y^3 z^2 - 624d^2 S_B k_{act} b_f^2 h_f^2 e^2 L_f P_{12} P_2 P_1 P_3 x^3 z^2 + \\
& 312d^2 S_B k_{act} b_f^2 h_f^2 e^2 L_f P_2 P_1 P_3 L_B^2 L_B^2 y^2 + 624d^2 S_B k_{act} b_f^2 h_f^2 e^2 L_f P_2 P_1 P_3 y^3 z^2 x - \\
& 624d^2 S_B k_{act} b_f^2 h_f^2 e^2 L_f P_{13} P_{12} P_2 P_1 P_3 y^2 z x - 624d^2 S_B k_{act} b_f^2 h_f^2 e^2 L_f P_{12} P_2 P_1 P_3 z^3 y^2 - \\
& 80d^2 S_B k_{act} b_f^4 L_f^3 P_{13} P_{12} P_2 P_1 P_3 y z L_B^2 + 624d^2 S_B k_{act} b_f^2 h_f^2 e^2 L_f P_{12} P_2 P_1 P_3 y^3 z^2 + \\
& 624d^2 S_B k_{act} b_f^2 h_f^2 e^2 L_f P_2 P_1 P_3 y^2 z^3 x + 624d^2 S_B k_{act} b_f^2 h_f^2 e^2 L_f P_2 P_1 P_3 y^2 x^2 z^2 - \\
& 624d^2 S_B k_{act} b_f^2 h_f^2 e^2 L_f P_{12} P_2 P_1 P_3 x z^4 - 624d^2 S_B k_{act} b_f^2 h_f^2 e^2 L_f P_{13} P_{12} P_2 P_1 P_3 y x z^2 - \\
& 624d^2 S_B k_{act} b_f^2 h_f^2 e^2 L_f P_{13} P_{12} P_2 P_1 P_3 z^2 y^2 - 624d^2 S_B k_{act} b_f^2 h_f^2 e^2 L_f P_{13} P_{12} P_2 P_1 P_3 z^3 y + \\
& 624d^2 S_B k_{act} b_f^2 h_f^2 e^2 L_f P_{13} P_2 P_1 P_3 y^2 x L_B^2 - 624d^2 S_B k_{act} b_f^2 h_f^2 e^2 L_f P_{13} P_2 P_1 P_3 y x^2 z^2 - \\
& 624d^2 S_B k_{act} b_f^2 h_f^2 e^2 L_f P_{13} P_2 P_1 P_3 x z^3 y - 624d^2 S_B k_{act} b_f^2 h_f^2 e^2 L_f P_{13} P_{12} P_2 P_1 P_3 y^3 z - \\
& 80h_f^2 d^2 S_B k_{act} b_f^2 L_f^3 P_{13} P_{12} P_2 P_1 P_3 y z L_B^2 + 624d^2 S_B k_{act} b_f^2 h_f^2 e^2 L_f P_{12} P_2 P_1 P_3 x z^2 L_B^2 - \\
& 624d^2 S_B k_{act} b_f^2 h_f^2 e^2 L_f P_{12} P_2 P_1 P_3 y^2 z x^2 - 624d^2 S_B k_{act} b_f^2 h_f^2 e^2 L_f P_{12} P_2 P_1 P_3 y^3 z x + \\
& 40d^2 S_B k_{act} b_f^4 L_f^3 P_2 P_1 P_3 L_B^4 x^2 \cos(\lambda)^2 + 40k_{act} b_f^3 h_f^5 e^2 P_2 P_3 y^3 x z^2 L_B^2 + 5d^2 k_{act} b_f^5 h_f^3 P_2 P_1 P_3 L_B^3 y^2 x^2 - \\
& 120y^2 z x^2 d^2 S_B k_{act} h_f^4 L_f^3 P_{12} P_2 P_1 P_3 - 10y z^3 L_B^3 d^2 k_{act} b_f^3 h_f^5 P_{13} P_2 P_1 P_3 - \\
& 10y z L_B^3 d^2 k_{act} b_f^5 h_f^3 P_{13} P_{12} P_2 P_1 P_3 - 10y z L_B^3 d^2 k_{act} b_f^3 h_f^5 P_{13} P_{12} P_2 P_1 P_3 - \\
& 120z^3 y d^2 S_B k_{act} h_f^4 L_f^3 P_{13} P_{12} P_2 P_1 P_3 - 40z^3 y b_f^2 d^2 S_B k_{act} h_f^2 L_f^3 P_{13} P_{12} P_2 P_1 P_3 - \\
& 10y z^2 L_B^3 d^2 k_{act} b_f^5 h_f^3 P_{13} P_2 P_1 P_3 - 120y^3 z^2 d^2 S_B k_{act} h_f^4 L_f^3 P_{13} P_2 P_1 P_3 - \\
& 40y^3 z^2 b_f^2 d^2 S_B k_{act} h_f^2 L_f^3 P_{13} P_2 P_1 P_3 - 40L_B^2 z^2 y^2 k_{act} b_f^3 h_f^5 e^2 P_{13} P_{12} P_1 P_3 - \\
& 40L_B^2 z^2 y^2 k_{act} b_f^5 h_f^3 e^2 P_{13} P_{12} P_1 P_3 - 10y^2 z L_B^2 L_B d^2 k_{act} b_f^3 h_f^5 P_{12} P_2 P_1 P_3 + 20k_{act} b_f^3 h_f^5 e^2 P_1 P_3 z^2 y^2 L_B^4 + \\
& 20k_{act} b_f^3 h_f^5 e^2 P_1 P_3 L_B^2 L_B^2 z^2 y^2 - 40k_{act} b_f^3 h_f^5 e^2 P_1 P_3 L_B^2 y^2 x^2 z^2 - 40k_{act} b_f^3 h_f^5 e^2 P_1 P_3 L_B^2 z^3 y^3 + \\
& 5d^2 k_{act} b_f^3 h_f^5 P_2 P_1 P_3 L_B^3 y^2 L_B^2 + 5d^2 k_{act} b_f^3 h_f^5 P_2 P_1 P_3 L_B^3 z^2 y^2 - 5d^2 k_{act} b_f^3 h_f^5 P_2 P_1 P_3 L_B^3 x^2 z^2 - \\
& 5d^2 k_{act} b_f^3 h_f^5 P_2 P_1 P_3 L_B^3 z^4 + 5d^2 k_{act} b_f^3 h_f^5 P_2 P_1 P_3 L_B^2 L_B^5 - 5d^2 k_{act} b_f^3 h_f^5 P_2 P_1 P_3 L_B^2 L_B^3 z^2 - \\
& 5d^2 k_{act} b_f^3 h_f^5 P_2 P_1 P_3 L_B^2 L_B^3 x^2 - 5d^2 k_{act} b_f^3 h_f^5 P_2 P_1 P_3 L_B L_B^2 x^2 y^2 + 5d^2 k_{act} b_f^3 h_f^5 P_2 P_1 P_3 L_B L_B^2 z^2 y^2 - \\
& 5d^2 k_{act} b_f^3 h_f^5 P_2 P_1 P_3 L_B L_B^2 y^4 - 5d^2 k_{act} b_f^3 h_f^5 P_2 P_1 P_3 L_B^5 x^2 - 5d^2 k_{act} b_f^3 h_f^5 P_2 P_1 P_3 L_B^5 y^2 + \\
& 5d^2 k_{act} b_f^3 h_f^5 P_2 P_1 P_3 L_B^3 x^2 z^2 + 5d^2 k_{act} b_f^3 h_f^5 P_2 P_1 P_3 L_B^3 y^2 x^2 + 10d^2 k_{act} b_f^3 h_f^5 P_2 P_1 P_3 L_B^3 z^2 y^2 + \\
& 5d^2 k_{act} b_f^3 h_f^5 P_2 P_1 P_3 L_B^3 x^4 - 20d^2 S_B b_f^5 h_f^3 E_{alu} P_{12} P_2 P_1 P_3 y^2 z L_B^2 + 20d^2 S_B b_f^5 h_f^3 E_{alu} P_{12} P_2 P_1 P_3 z^3 y^2 + \\
& 20d^2 S_B b_f^5 h_f^3 E_{alu} P_{12} P_2 P_1 P_3 y^2 z x^2 - 20d^2 S_B b_f^3 h_f^5 E_{alu} P_{12} P_2 P_1 P_3 y^2 z L_B^2 + \\
& 20d^2 S_B b_f^3 h_f^5 E_{alu} P_{12} P_2 P_1 P_3 z^3 y^2 + 20d^2 S_B b_f^3 h_f^5 E_{alu} P_{12} P_2 P_1 P_3 y^2 z x^2 - \\
& 20d^2 S_B b_f^3 h_f^5 E_{alu} P_{13} P_2 P_1 P_3 L_B^2 y z^2 + 20d^2 S_B b_f^3 h_f^5 E_{alu} P_{13} P_2 P_1 P_3 y^3 z^2 + \\
& 20d^2 S_B b_f^3 h_f^5 E_{alu} P_{13} P_2 P_1 P_3 y x^2 z^2 - 20d^2 S_B b_f^3 h_f^5 E_{alu} P_{13} P_{12} P_2 P_1 P_3 y z L_B^2 + \\
& 20d^2 S_B b_f^3 h_f^5 E_{alu} P_{13} P_{12} P_2 P_1 P_3 y^3 z + -10y^2 z L_B^2 L_B d^2 k_{act} b_f^5 h_f^3 P_{12} P_2 P_1 P_3 - \\
& 40y^2 z x^2 b_f^2 d^2 S_B k_{act} h_f^2 L_f^3 P_{12} P_2 P_1 P_3 + 40k_{act} b_f^5 h_f^3 e^2 P_{12} P_1 P_3 L_B^2 y^3 z^2 - \\
& 40k_{act} b_f^5 h_f^3 e^2 P_{12} P_1 P_3 L_B^2 z^3 y^2 + 40k_{act} b_f^3 h_f^5 e^2 P_2 P_3 L_B^2 z^2 y^4 + 20P_2 P_1 k_{act} b_f^5 h_f^3 e^2 L_B^2 z^2 L_B^4 - \\
& 20P_2 P_1 k_{act} b_f^5 h_f^3 e^2 L_B^2 L_B^2 x^2 z^2 - 20P_2 P_1 k_{act} b_f^5 h_f^3 e^2 L_B^2 L_B^2 z^4 - 20P_2 P_1 k_{act} b_f^5 h_f^3 e^2 z^2 y^2 L_B^4 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 40P_2P_1k_{act}b_f^5h_f^3e^2L_B^2z^4y^2 + 40P_2P_1k_{act}b_f^5h_f^3e^2L_B^2y^2z^3x + 40P_2P_1k_{act}b_f^5h_f^3e^2L_B^2y^2x^2z^2 + \\
& 20k_{act}b_f^3h_f^5e^2P_2P_3L_B^2L_B^4y^2 - 20k_{act}b_f^3h_f^5e^2P_2P_3L_B^2L_B^2z^2y^2 - 20k_{act}b_f^3h_f^5e^2P_2P_3L_B^4y^4 - \\
& 20k_{act}b_f^3h_f^5e^2P_2P_3L_B^4y^2x^2 + 40k_{act}b_f^3h_f^5e^2P_2P_3L_B^2y^2x^2z^2 + 10d^2k_{act}b_f^5h_f^3P_2P_1P_3L_B^3z^2y^2 + \\
& 5d^2k_{act}b_f^5h_f^3P_2P_1P_3L_B^3x^4 + 10d^2S_Bb_f^3h_f^5E_{alu}P_2P_1P_3L_B^2L_B^4 - 10d^2S_Bb_f^3h_f^5E_{alu}P_2P_1P_3L_B^2L_B^2z^2 - \\
& 10d^2S_Bb_f^3h_f^5E_{alu}P_2P_1P_3L_B^2x^2L_B^2 + 10d^2S_Bb_f^3h_f^5E_{alu}P_2P_1P_3L_B^2z^2y^2 - \\
& 10d^2S_Bb_f^3h_f^5E_{alu}P_2P_1P_3L_B^4x^2 - 10d^2S_Bb_f^3h_f^5E_{alu}P_2P_1P_3L_B^4y^2 + 30d^2S_Bb_f^3h_f^5E_{alu}P_2P_1P_3L_B^2z^2y^2 + \\
& 10d^2S_Bb_f^3h_f^5E_{alu}P_2P_1P_3L_B^2x^2z^2 + 10d^2S_Bb_f^3h_f^5E_{alu}P_2P_1P_3L_B^2x^2y^2 + \\
& 10d^2S_Bb_f^3h_f^5E_{alu}P_2P_1P_3L_B^2x^4 - 20d^2S_Bb_f^3h_f^5E_{alu}P_2P_1P_3y^2x^2z^2 - 20d^2S_Bb_f^3h_f^5E_{alu}P_2P_1P_3z^4y^2 - \\
& 20d^2S_Bb_f^3h_f^5E_{alu}P_2P_1P_3z^2y^4 + 60d^2S_Bk_{act}h_f^4L_f^3P_2P_1P_3L_B^2L_B^2z^2 - 60d^2S_Bk_{act}h_f^4L_f^3P_2P_1P_3L_B^2z^4 - \\
& 60d^2S_Bk_{act}h_f^4L_f^3P_2P_1P_3L_B^2x^2z^2 + 60d^2S_Bk_{act}h_f^4L_f^3P_2P_1P_3L_B^2x^2y^2 - \\
& 60d^2S_Bk_{act}h_f^4L_f^3P_2P_1P_3L_B^2x^2z^2 - 60d^2S_Bk_{act}h_f^4L_f^3P_2P_1P_3y^4x^2 - 60d^2S_Bk_{act}h_f^4L_f^3P_2P_1P_3y^2x^4 + \\
& 60d^2S_Bk_{act}h_f^4L_f^3P_2P_1P_3y^2x^2z^2 + 60d^2S_Bk_{act}h_f^4L_f^3P_2P_1P_3z^4y^2 + 60d^2S_Bk_{act}h_f^4L_f^3P_2P_1P_3z^2y^4 + \\
& 60d^2S_Bk_{act}h_f^4L_f^3P_2P_1P_3x^4z^2 + 60d^2S_Bk_{act}h_f^4L_f^3P_2P_1P_3x^2z^4 + 40k_{act}b_f^3h_f^5e^2P_{13}P_2P_3y^2xL_B^2L_B^2 - \\
& 40k_{act}b_f^3h_f^5e^2P_{13}P_2P_3L_B^2y^2x^3 - 40k_{act}b_f^3h_f^5e^2P_{13}P_2P_3L_B^2y^4x + 40k_{act}b_f^3h_f^5e^2P_{13}P_2P_3y^2xL_B^2L_B^2 - \\
& 40k_{act}b_f^3h_f^5e^2P_{13}P_2P_3L_B^2y^2x^3 - 40k_{act}b_f^3h_f^5e^2P_{13}P_2P_3L_B^2y^4x - 40k_{act}b_f^3h_f^5e^2P_{13}P_1P_3L_B^2y^3z^2 + \\
& 40k_{act}b_f^3h_f^5e^2P_{13}P_1P_3L_B^2z^3y^2 - 40P_{13}P_2P_1k_{act}b_f^5h_f^3e^2L_B^2xz^3y - 40P_{13}P_2P_1k_{act}b_f^5h_f^3e^2L_B^2yx^2z^2 - \\
& 40P_{13}P_2P_1k_{act}b_f^5h_f^3e^2L_B^2xz^3y - 40P_{13}P_2P_1k_{act}b_f^5h_f^3e^2L_B^2yx^2z^2 - 40k_{act}b_f^5h_f^3e^2P_{12}P_2P_3L_B^2y^2zx^2 - \\
& 40k_{act}b_f^5h_f^3e^2P_{12}P_2P_3L_B^2y^3zx - 40k_{act}b_f^5h_f^3e^2P_{12}P_2P_3L_B^2y^3zx - 40k_{act}b_f^5h_f^3e^2P_{12}P_2P_3L_B^2y^3zx - \\
& 40k_{act}b_f^5h_f^3e^2P_{13}P_{12}P_2P_3L_B^2y^3z - 40k_{act}b_f^5h_f^3e^2P_{13}P_{12}P_2P_3L_B^2y^2zx - \\
& 40k_{act}b_f^5h_f^3e^2P_{13}P_{12}P_2P_3L_B^2y^3z - 40k_{act}b_f^5h_f^3e^2P_{13}P_{12}P_2P_3L_B^2y^2zx + 40P_{12}P_2P_1k_{act}b_f^5h_f^3e^2xz^2L_B^4 - \\
& 40P_{12}P_2P_1k_{act}b_f^5h_f^3e^2L_B^2x^3z^2 - 40P_{12}P_2P_1k_{act}b_f^5h_f^3e^2L_B^2xz^4 + 40P_{12}P_2P_1k_{act}b_f^5h_f^3e^2xz^2L_B^4 - \\
& 40P_{12}P_2P_1k_{act}b_f^5h_f^3e^2L_B^2x^3z^2 - 40P_{12}P_2P_1k_{act}b_f^5h_f^3e^2L_B^2xz^4 + 20k_{act}b_f^5h_f^3e^2P_1P_3z^2y^2L_B^4 + \\
& 20k_{act}b_f^5h_f^3e^2P_1P_3L_B^2L_B^2z^2y^2 - 40k_{act}b_f^5h_f^3e^2P_1P_3L_B^2y^2x^2z^2 - 40k_{act}b_f^5h_f^3e^2P_1P_3L_B^2z^3y^3 + \\
& 20P_2P_1k_{act}b_f^5h_f^3e^2L_B^2z^2L_B^4 - 20P_2P_1k_{act}b_f^5h_f^3e^2L_B^2L_B^2x^2z^2 - 20P_2P_1k_{act}b_f^5h_f^3e^2L_B^2L_B^2z^4 - \\
& 20P_2P_1k_{act}b_f^5h_f^3e^2z^2y^2L_B^4 + 40P_2P_1k_{act}b_f^5h_f^3e^2L_B^2z^4y^2 + 40P_2P_1k_{act}b_f^5h_f^3e^2L_B^2y^2z^3x + \\
& 40P_2P_1k_{act}b_f^5h_f^3e^2L_B^2y^2x^2z^2 - 40P_{13}P_{12}P_2P_1k_{act}b_f^5h_f^3e^2L_B^2yxz^2 - 40P_{13}P_{12}P_2P_1k_{act}b_f^5h_f^3e^2L_B^2z^3y + \\
& 20k_{act}b_f^3h_f^5e^2P_1P_3z^2y^2L_B^4 + 20k_{act}b_f^3h_f^5e^2P_1P_3L_B^2L_B^2z^2y^2 - 40k_{act}b_f^3h_f^5e^2P_1P_3L_B^2y^2x^2z^2 - \\
& 40k_{act}b_f^3h_f^5e^2P_1P_3L_B^2z^3y^3 + 5d^2k_{act}b_f^3h_f^5P_2P_1P_3L_B^3y^2L_B^2 + 5d^2k_{act}b_f^3h_f^5P_2P_1P_3L_B^3z^2y^2 - \\
& 5d^2k_{act}b_f^3h_f^5P_2P_1P_3L_B^3x^2z^2 - 5d^2k_{act}b_f^3h_f^5P_2P_1P_3L_B^3z^4 + 5d^2k_{act}b_f^3h_f^5P_2P_1P_3L_B^2L_B^5 - \\
& 5d^2k_{act}b_f^3h_f^5P_2P_1P_3L_B^2L_B^3z^2 - 5d^2k_{act}b_f^3h_f^5P_2P_1P_3L_B^2L_B^3x^2 - 5d^2k_{act}b_f^3h_f^5P_2P_1P_3L_B^2L_B^2x^2y^2 + \\
& 5d^2k_{act}b_f^3h_f^5P_2P_1P_3L_B^2L_B^2z^2y^2 - 5d^2k_{act}b_f^3h_f^5P_2P_1P_3L_B^2L_B^2y^4 - 5d^2k_{act}b_f^3h_f^5P_2P_1P_3L_B^5x^2 - \\
& 5d^2k_{act}b_f^3h_f^5P_2P_1P_3L_B^5y^2 + 5d^2k_{act}b_f^3h_f^5P_2P_1P_3L_B^3x^2z^2 + 5d^2k_{act}b_f^3h_f^5P_2P_1P_3L_B^3y^2x^2 + \\
& 10d^2k_{act}b_f^3h_f^5P_2P_1P_3L_B^3z^2y^2 + 5d^2k_{act}b_f^3h_f^5P_2P_1P_3L_B^3x^4 - 20d^2S_Bb_f^3h_f^5E_{alu}P_{12}P_2P_1P_3y^2zL_B^2 + \\
& 20d^2S_Bb_f^3h_f^5E_{alu}P_{12}P_2P_1P_3z^3y^2 + 20d^2S_Bb_f^3h_f^5E_{alu}P_{12}P_2P_1P_3y^2zx^2 - \\
& 20d^2S_Bb_f^3h_f^5E_{alu}P_{12}P_2P_1P_3y^2zx^2 - 20d^2S_Bb_f^3h_f^5E_{alu}P_{13}P_2P_1P_3L_B^2yz^2 + \\
& 20d^2S_Bb_f^3h_f^5E_{alu}P_{13}P_2P_1P_3y^3z^2 + 20d^2S_Bb_f^3h_f^5E_{alu}P_{13}P_2P_1P_3yx^2z^2 - \\
& 20d^2S_Bb_f^3h_f^5E_{alu}P_{13}P_{12}P_2P_1P_3yzL_B^2 + 20d^2S_Bb_f^3h_f^5E_{alu}P_{13}P_{12}P_2P_1P_3y^3z + \\
& 20d^2S_Bb_f^3h_f^5E_{alu}P_{13}P_{12}P_2P_1P_3z^3y - 20d^2S_Bb_f^3h_f^5E_{alu}P_{13}P_2P_1P_3L_B^2yz^2 + \\
& 20d^2S_Bb_f^3h_f^5E_{alu}P_{13}P_2P_1P_3y^3z^2 + 20d^2S_Bb_f^3h_f^5E_{alu}P_{13}P_2P_1P_3yx^2z^2 + \\
& 10d^2S_Bb_f^3h_f^5E_{alu}P_2P_1P_3L_B^2L_B^4 - 10d^2S_Bb_f^3h_f^5E_{alu}P_2P_1P_3L_B^2L_B^2z^2 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 10d^2 S_B b_f^5 h_f^3 E_{alu} P_2 P_1 P_3 L_B^2 x^2 L_B^2 + 10d^2 S_B b_f^5 h_f^3 E_{alu} P_2 P_1 P_3 L_B^2 z^2 y^2 - \\
& 10d^2 S_B b_f^5 h_f^3 E_{alu} P_2 P_1 P_3 L_B^4 x^2 - 10d^2 S_B b_f^5 h_f^3 E_{alu} P_2 P_1 P_3 L_B^4 y^2 + 30d^2 S_B b_f^5 h_f^3 E_{alu} P_2 P_1 P_3 L_B^2 z^2 y^2 + \\
& 10d^2 S_B b_f^5 h_f^3 E_{alu} P_2 P_1 P_3 L_B^2 x^2 z^2 + 10d^2 S_B b_f^5 h_f^3 E_{alu} P_2 P_1 P_3 L_B^2 x^2 y^2 + 10d^2 S_B b_f^5 h_f^3 E_{alu} P_2 P_1 P_3 L_B^2 x^4 - \\
& 20d^2 S_B b_f^5 h_f^3 E_{alu} P_2 P_1 P_3 y^2 x^2 z^2 - 20d^2 S_B b_f^5 h_f^3 E_{alu} P_2 P_1 P_3 z^4 y^2 - 20d^2 S_B b_f^5 h_f^3 E_{alu} P_2 P_1 P_3 z^2 y^4 - \\
& 20d^2 S_B b_f^5 h_f^3 E_{alu} P_{13} P_{12} P_2 P_1 P_3 y z L_B^2 + 20d^2 S_B b_f^5 h_f^3 E_{alu} P_{13} P_{12} P_2 P_1 P_3 y^3 z + \\
& 20d^2 S_B b_f^5 h_f^3 E_{alu} P_{13} P_{12} P_2 P_1 P_3 z^3 y + 20k_{act} b_f^5 h_f^3 e^2 P_2 P_3 L_B^2 L_B^4 y^2 - 20k_{act} b_f^5 h_f^3 e^2 P_2 P_3 L_B^2 L_B^2 z^2 y^2 - \\
& 20k_{act} b_f^5 h_f^3 e^2 P_2 P_3 L_B^4 y^4 - 20k_{act} b_f^5 h_f^3 e^2 P_2 P_3 L_B^4 y^2 x^2 + 40k_{act} b_f^5 h_f^3 e^2 P_2 P_3 L_B^2 y^2 x^2 z^2 + \\
& 40k_{act} b_f^5 h_f^3 e^2 P_2 P_3 y^3 x z^2 L_B^2 + 40k_{act} b_f^5 h_f^3 e^2 P_2 P_3 L_B^2 z^2 y^4 - 40k_{act} b_f^5 h_f^3 e^2 P_{13} P_1 P_3 L_B^2 y^3 z^2 + \\
& 40k_{act} b_f^5 h_f^3 e^2 P_{13} P_1 P_3 L_B^2 z^3 y^2 + 20b_f^2 d^2 S_B k_{act} h_f^2 L_f^3 P_2 P_1 P_3 L_B^2 L_B^2 z^2 - \\
& 60b_f^2 d^2 S_B k_{act} h_f^2 L_f^3 P_2 P_1 P_3 L_B^2 z^4 - 60b_f^2 d^2 S_B k_{act} h_f^2 L_f^3 P_2 P_1 P_3 L_B^2 x^2 z^2 + \\
& 60b_f^2 d^2 S_B k_{act} h_f^2 L_f^3 P_2 P_1 P_3 L_B^2 x^2 y^2 - 20b_f^2 d^2 S_B k_{act} h_f^2 L_f^3 P_2 P_1 P_3 L_B^2 x^2 z^2 - \\
& 60b_f^2 d^2 S_B k_{act} h_f^2 L_f^3 P_2 P_1 P_3 y^4 x^2 - 60b_f^2 d^2 S_B k_{act} h_f^2 L_f^3 P_2 P_1 P_3 y^2 x^4 - \\
& 20b_f^2 d^2 S_B k_{act} h_f^2 L_f^3 P_2 P_1 P_3 y^2 x^2 z^2 - 20b_f^2 d^2 S_B k_{act} h_f^2 L_f^3 P_2 P_1 P_3 z^4 y^2 - \\
& 20b_f^2 d^2 S_B k_{act} h_f^2 L_f^3 P_2 P_1 P_3 z^2 y^4 + 60b_f^2 d^2 S_B k_{act} h_f^2 L_f^3 P_2 P_1 P_3 x^4 z^2 + 60b_f^2 d^2 S_B k_{act} h_f^2 L_f^3 P_2 P_1 P_3 x^2 z^4 + \\
& 5d^2 k_{act} b_f^5 h_f^3 P_2 P_1 P_3 L_B^2 z^2 L_B^2 + 5d^2 k_{act} b_f^5 h_f^3 P_2 P_1 P_3 L_B^3 y^2 L_B^2 + 5d^2 k_{act} b_f^5 h_f^3 P_2 P_1 P_3 L_B^3 z^2 y^2 - \\
& 5d^2 k_{act} b_f^5 h_f^3 P_2 P_1 P_3 L_B^3 x^2 z^2 - 5d^2 k_{act} b_f^5 h_f^3 P_2 P_1 P_3 L_B^3 z^4 + 5d^2 k_{act} b_f^5 h_f^3 P_2 P_1 P_3 L_B^2 L_B^5 - \\
& 5d^2 k_{act} b_f^5 h_f^3 P_2 P_1 P_3 L_B^2 L_B^3 z^2 - 5d^2 k_{act} b_f^5 h_f^3 P_2 P_1 P_3 L_B^2 L_B^3 x^2 - 5d^2 k_{act} b_f^5 h_f^3 P_2 P_1 P_3 L_B L_B^2 x^2 y^2 + \\
& 5d^2 k_{act} b_f^5 h_f^3 P_2 P_1 P_3 L_B L_B^2 z^2 y^2 - 5d^2 k_{act} b_f^5 h_f^3 P_2 P_1 P_3 L_B L_B^2 y^4 - 5d^2 k_{act} b_f^5 h_f^3 P_2 P_1 P_3 L_B^5 x^2 - \\
& 5d^2 k_{act} b_f^5 h_f^3 P_2 P_1 P_3 L_B^5 y^2 + 5d^2 k_{act} b_f^5 h_f^3 P_2 P_1 P_3 L_B^3 x^2 z^2 + 40k_{act} b_f^5 h_f^5 e^2 P_{12} P_1 P_3 L_B^2 y^3 z^2 - \\
& 40k_{act} b_f^5 h_f^5 e^2 P_{12} P_1 P_3 L_B^2 z^3 y^2 + 5d^2 k_{act} b_f^5 h_f^5 P_2 P_1 P_3 L_B^3 z^2 L_B^2 - 40P_{13} P_{12} P_2 P_1 k_{act} b_f^5 h_f^5 e^2 L_B^2 y x z^2 - \\
& 40P_{13} P_{12} P_2 P_1 k_{act} b_f^5 h_f^5 e^2 L_B^2 z^3 y - 160y x^2 z^2 d^2 S_B k_{act} b_f^4 \cos(\lambda)^2 L_f^3 P_{13} P_2 P_1 P_3 - \\
& 160y x^2 z^2 h_f^2 d^2 S_B k_{act} b_f^2 \cos(\lambda)^2 L_f^3 P_{13} P_2 P_1 P_3 - 120d^2 S_B k_{act} h_f^4 \cos(\lambda) e L_f^2 P_2 P_1 P_3 L_B^2 x^2 z^2 - \\
& 120d^2 S_B k_{act} h_f^4 \cos(\lambda) e L_f^2 P_2 P_1 P_3 y^2 x^4 + 120d^2 S_B k_{act} h_f^4 \cos(\lambda) e L_f^2 P_2 P_1 P_3 y^3 z^2 x + \\
& 120d^2 S_B k_{act} h_f^4 \cos(\lambda) e L_f^2 P_2 P_1 P_3 y^2 x^2 z^2 + 120d^2 S_B k_{act} h_f^4 \cos(\lambda) e L_f^2 P_2 P_1 P_3 y^2 z^3 x + \\
& 120d^2 S_B k_{act} h_f^4 \cos(\lambda) e L_f^2 P_2 P_1 P_3 x^2 z^4 + 120d^2 S_B k_{act} h_f^4 \cos(\lambda) e L_f^2 P_2 P_1 P_3 x^4 z^2 - \\
& 120d^2 S_B k_{act} h_f^4 \cos(\lambda) e L_f^2 P_2 P_1 P_3 y^4 x^2 + 120d^2 S_B k_{act} h_f^4 \cos(\lambda) e L_f^2 P_2 P_1 P_3 z^4 y^2 + \\
& 120d^2 S_B k_{act} h_f^4 \cos(\lambda) e L_f^2 P_2 P_1 P_3 z^2 y^4 - 120d^2 S_B k_{act} h_f^4 \cos(\lambda) e L_f^2 P_2 P_1 P_3 z^3 y^3 - \\
& 80d^2 S_B k_{act} b_f^4 \sin(\lambda) P_{23} \cos(\lambda) L_f^3 P_2 P_1 P_3 L_B^2 y L_B^2 + 80d^2 S_B k_{act} b_f^4 \sin(\lambda) P_{23} \cos(\lambda) L_f^3 P_2 P_1 P_3 L_B^2 y z^2 + \\
& 80d^2 S_B k_{act} b_f^4 \sin(\lambda) P_{23} \cos(\lambda) L_f^3 P_2 P_1 P_3 L_B^2 y x^2 + 80d^2 S_B k_{act} b_f^4 \sin(\lambda) P_{23} \cos(\lambda) L_f^3 P_2 P_1 P_3 L_B^2 y x^2 + \\
& 80d^2 S_B k_{act} b_f^4 \sin(\lambda) P_{23} \cos(\lambda) L_f^3 P_2 P_1 P_3 L_B^2 y^3 - 80d^2 S_B k_{act} b_f^4 \sin(\lambda) P_{23} \cos(\lambda) L_f^3 P_2 P_1 P_3 y x^2 z^2 - \\
& 80d^2 S_B k_{act} b_f^4 \sin(\lambda) P_{23} \cos(\lambda) L_f^3 P_2 P_1 P_3 y x^4 - 80d^2 S_B k_{act} b_f^4 \sin(\lambda) P_{23} \cos(\lambda) L_f^3 P_2 P_1 P_3 y^3 x^2 - \\
& 160y^3 z h_f^2 d^2 S_B k_{act} b_f^2 \cos(\lambda)^2 L_f^3 P_{13} P_{12} P_2 P_1 P_3 - 160d^2 S_B k_{act} b_f^4 \sin(\lambda) P_{23} \cos(\lambda) L_f^3 P_2 P_1 P_3 y^3 z^2 + \\
& 120d^2 S_B k_{act} b_f^4 \cos(\lambda)^2 L_f^3 P_2 P_1 P_3 z^2 y^4 + 80h_f^2 d^2 S_B k_{act} b_f^2 \cos(\lambda) \sin(\lambda) L_f^3 P_{13} P_2 P_1 P_3 z y^4 + \\
& 160d^2 S_B k_{act} b_f^4 \cos(\lambda) \sin(\lambda) L_f^3 P_{13} P_{12} P_2 P_1 P_3 z^2 y^2 + 120d^2 S_B k_{act} h_f^4 \cos(\lambda) e L_f^2 P_2 P_1 P_3 L_B^2 x^2 y^2 - \\
& 120b_f^2 d^2 S_B k_{act} h_f^2 \cos(\lambda) e L_f^2 P_{12} P_2 P_1 P_3 x^3 z^2 - 80d^2 S_B k_{act} b_f^4 \cos(\lambda) \sin(\lambda) L_f^3 P_{12} P_2 P_1 P_3 x z^2 L_B^2 - \\
& 360d^2 S_B k_{act} h_f^4 \cos(\lambda)^2 e L_f P_{13} P_{12} P_2 P_1 P_3 y^3 z - 160z^3 y^2 h_f^2 d^2 S_B k_{act} b_f^2 \cos(\lambda)^2 L_f^3 P_{12} P_2 P_1 P_3 - \\
& 160z^3 y^2 d^2 S_B k_{act} b_f^4 \cos(\lambda)^2 L_f^3 P_{12} P_2 P_1 P_3 + 160y^2 z d^2 S_B k_{act} b_f^4 \cos(\lambda) \sin(\lambda) P_{23} L_f^3 P_{13} P_{12} P_2 P_1 P_3 + \\
& 160y^2 z h_f^2 d^2 S_B k_{act} b_f^2 \cos(\lambda) \sin(\lambda) P_{23} L_f^3 P_{13} P_{12} P_2 P_1 P_3 - \\
& 160y^3 z d^2 S_B k_{act} b_f^4 \cos(\lambda)^2 L_f^3 P_{13} P_{12} P_2 P_1 P_3 + 80d^2 S_B k_{act} b_f^4 \cos(\lambda) \sin(\lambda) L_f^3 P_{12} P_2 P_1 P_3 x^3 z^2 + \\
& 80d^2 S_B k_{act} b_f^4 \cos(\lambda) \sin(\lambda) L_f^3 P_{12} P_2 P_1 P_3 x z^4 - 80d^2 S_B k_{act} b_f^4 \cos(\lambda) \sin(\lambda) L_f^3 P_{12} P_2 P_1 P_3 y^2 x z^2 + \\
& 160h_f^2 d^2 S_B k_{act} b_f^2 \cos(\lambda) \sin(\lambda) L_f^3 P_{13} P_{12} P_2 P_1 P_3 z^2 y^2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 160h_f^2d^2S_Bk_{act}b_f^2\cos(\lambda)\sin(\lambda)L_f^3P_{13}P_{12}P_2P_1P_3yxz^2 - \\
& 360d^2S_Bk_{act}h_f^4\cos(\lambda)^2e^2L_fP_{13}P_{12}P_2P_1P_3yxz^2 - 360d^2S_Bk_{act}h_f^4\cos(\lambda)^2e^2L_fP_{13}P_{12}P_2P_1P_3z^3y - \\
& 360d^2S_Bk_{act}h_f^4\cos(\lambda)^2e^2L_fP_{13}P_{12}P_2P_1P_3z^2y^2 - 360d^2S_Bk_{act}h_f^4\cos(\lambda)^2e^2L_fP_{13}P_{12}P_2P_1P_3y^2zx - \\
& 120b_f^2d^2S_Bk_{act}h_f^2\cos(\lambda)eL_f^2P_{12}P_2P_1P_3xz^4 - 240b_f^2d^2S_Bk_{act}h_f^2\cos(\lambda)eL_f^2P_{12}P_2P_1P_3y^2zx^2 + \\
& 120b_f^2d^2S_Bk_{act}h_f^2\cos(\lambda)eL_f^2P_{12}P_2P_1P_3y^3z^2 - 264b_f^2d^2S_Bk_{act}h_f^2\cos(\lambda)^2e^2L_fP_{12}P_2P_1P_3xz^2L_B^2 + \\
& 264b_f^2d^2S_Bk_{act}h_f^2\cos(\lambda)^2e^2L_fP_{12}P_2P_1P_3z^3y^2 + 264b_f^2d^2S_Bk_{act}h_f^2\cos(\lambda)^2e^2L_fP_{12}P_2P_1P_3y^2zx^2 + \\
& 264b_f^2d^2S_Bk_{act}h_f^2\cos(\lambda)^2e^2L_fP_{12}P_2P_1P_3x^3z^2 + 264b_f^2d^2S_Bk_{act}h_f^2\cos(\lambda)^2e^2L_fP_{12}P_2P_1P_3y^3zx + \\
& 264b_f^2d^2S_Bk_{act}h_f^2\cos(\lambda)^2e^2L_fP_{12}P_2P_1P_3xz^4 - 264b_f^2d^2S_Bk_{act}h_f^2\cos(\lambda)^2e^2L_fP_{12}P_2P_1P_3y^3z^2 - \\
& 40d^2S_Bk_{act}b_f^4\cos(\lambda)^2L_f^3P_2P_1P_3x^2z^4 - 120d^2S_Bk_{act}h_f^4\cos(\lambda)eL_f^2P_{13}P_{12}P_2P_1P_3yxz^2 - \\
& 240d^2S_Bk_{act}h_f^4\cos(\lambda)eL_f^2P_{13}P_{12}P_2P_1P_3z^3y - 120d^2S_Bk_{act}h_f^4\cos(\lambda)eL_f^2P_{13}P_{12}P_2P_1P_3y^2zx - \\
& 120d^2S_Bk_{act}h_f^4\cos(\lambda)eL_f^2P_{13}P_{12}P_2P_1P_3z^2y^2 - 120b_f^2d^2S_Bk_{act}h_f^2\cos(\lambda)eL_f^2P_{13}P_{12}P_2P_1P_3yxz^2 - \\
& 240b_f^2d^2S_Bk_{act}h_f^2\cos(\lambda)eL_f^2P_{13}P_{12}P_2P_1P_3z^3y - 120b_f^2d^2S_Bk_{act}h_f^2\cos(\lambda)eL_f^2P_{13}P_{12}P_2P_1P_3y^2zx - \\
& 120b_f^2d^2S_Bk_{act}h_f^2\cos(\lambda)eL_f^2P_{13}P_{12}P_2P_1P_3z^2y^2 + 264b_f^2d^2S_Bk_{act}h_f^2\cos(\lambda)^2e^2L_fP_{13}P_{12}P_2P_1P_3yxz^2 + \\
& 264b_f^2d^2S_Bk_{act}h_f^2\cos(\lambda)^2e^2L_fP_{13}P_{12}P_2P_1P_3z^3y + \\
& 264b_f^2d^2S_Bk_{act}h_f^2\cos(\lambda)^2e^2L_fP_{13}P_{12}P_2P_1P_3z^2y^2 + \\
& 264b_f^2d^2S_Bk_{act}h_f^2\cos(\lambda)^2e^2L_fP_{13}P_{12}P_2P_1P_3y^2zx + \\
& 264b_f^2d^2S_Bk_{act}h_f^2\cos(\lambda)^2e^2L_fP_{13}P_{12}P_2P_1P_3y^3z - 264b_f^2d^2S_Bk_{act}h_f^2\cos(\lambda)^2e^2L_fP_{13}P_2P_1P_3y^2xL_B^2 - \\
& 264b_f^2d^2S_Bk_{act}h_f^2\cos(\lambda)^2e^2L_fP_{13}P_2P_1P_3z^3y^2 + 264b_f^2d^2S_Bk_{act}h_f^2\cos(\lambda)^2e^2L_fP_{13}P_2P_1P_3xz^3y + \\
& 264b_f^2d^2S_Bk_{act}h_f^2\cos(\lambda)^2e^2L_fP_{13}P_2P_1P_3yx^2z^2 + 264b_f^2d^2S_Bk_{act}h_f^2\cos(\lambda)^2e^2L_fP_{13}P_2P_1P_3y^4x + \\
& 264b_f^2d^2S_Bk_{act}h_f^2\cos(\lambda)^2e^2L_fP_{13}P_2P_1P_3y^2x^3 + 264b_f^2d^2S_Bk_{act}h_f^2\cos(\lambda)^2e^2L_fP_{13}P_2P_1P_3y^3z^2 + \\
& 360d^2S_Bk_{act}h_f^4\cos(\lambda)^2e^2L_fP_{13}P_2P_1P_3y^2xL_B^2 + 360d^2S_Bk_{act}h_f^4\cos(\lambda)^2e^2L_fP_{13}P_2P_1P_3z^3y^2 - \\
& 360d^2S_Bk_{act}h_f^4\cos(\lambda)^2e^2L_fP_{13}P_2P_1P_3xz^3y - 360d^2S_Bk_{act}h_f^4\cos(\lambda)^2e^2L_fP_{13}P_2P_1P_3yx^2z^2 - \\
& 360d^2S_Bk_{act}h_f^4\cos(\lambda)^2e^2L_fP_{13}P_2P_1P_3y^4x - 360d^2S_Bk_{act}h_f^4\cos(\lambda)^2e^2L_fP_{13}P_2P_1P_3y^2x^3 - \\
& 360d^2S_Bk_{act}h_f^4\cos(\lambda)^2e^2L_fP_{13}P_2P_1P_3y^3z^2 + 120b_f^2d^2S_Bk_{act}h_f^2\cos(\lambda)eL_f^2P_{13}P_2P_1P_3y^2xL_B^2 + \\
& 120b_f^2d^2S_Bk_{act}h_f^2\cos(\lambda)eL_f^2P_{13}P_2P_1P_3z^3y^2 - 120b_f^2d^2S_Bk_{act}h_f^2\cos(\lambda)eL_f^2P_{13}P_2P_1P_3xz^3y - \\
& 240b_f^2d^2S_Bk_{act}h_f^2\cos(\lambda)eL_f^2P_{13}P_2P_1P_3y^3z^2 - 120b_f^2d^2S_Bk_{act}h_f^2\cos(\lambda)eL_f^2P_{13}P_2P_1P_3y^4x - \\
& 120b_f^2d^2S_Bk_{act}h_f^2\cos(\lambda)eL_f^2P_{13}P_2P_1P_3y^2x^3 + 120d^2S_Bk_{act}h_f^4\cos(\lambda)eL_f^2P_{13}P_2P_1P_3y^2xL_B^2 + \\
& 120d^2S_Bk_{act}h_f^4\cos(\lambda)eL_f^2P_{13}P_2P_1P_3z^3y^2 - 120d^2S_Bk_{act}h_f^4\cos(\lambda)eL_f^2P_{13}P_2P_1P_3xz^3y - \\
& 240d^2S_Bk_{act}h_f^4\cos(\lambda)eL_f^2P_{13}P_2P_1P_3y^3z^2 - 120d^2S_Bk_{act}h_f^4\cos(\lambda)eL_f^2P_{13}P_2P_1P_3y^4x - \\
& 120d^2S_Bk_{act}h_f^4\cos(\lambda)eL_f^2P_{13}P_2P_1P_3y^2x^3 - 80d^2S_Bk_{act}b_f^4\cos(\lambda)\sin(\lambda)L_f^3P_{13}P_2P_1P_3y^2zL_B^2 - \\
& 80d^2S_Bk_{act}b_f^4\cos(\lambda)\sin(\lambda)L_f^3P_{13}P_2P_1P_3z^3y^2 + 80d^2S_Bk_{act}b_f^4\cos(\lambda)\sin(\lambda)L_f^3P_{13}P_2P_1P_3y^2zx^2 + \\
& 80d^2S_Bk_{act}b_f^4\cos(\lambda)\sin(\lambda)L_f^3P_{13}P_2P_1P_3zy^4 - 80h_f^2d^2S_Bk_{act}b_f^2\cos(\lambda)\sin(\lambda)L_f^3P_{13}P_2P_1P_3y^2zL_B^2 - \\
& 80h_f^2d^2S_Bk_{act}b_f^2\cos(\lambda)\sin(\lambda)L_f^3P_{13}P_2P_1P_3z^3y^2 + \\
& 80h_f^2d^2S_Bk_{act}b_f^2\cos(\lambda)\sin(\lambda)L_f^3P_{13}P_2P_1P_3y^2zx^2 - 40d^2S_Bk_{act}b_f^4\cos(\lambda)^2L_f^3P_2P_1P_3L_B^2y^4 - \\
& 40d^2S_Bk_{act}b_f^4\cos(\lambda)^2L_f^3P_2P_1P_3x^4z^2 + 40d^2S_Bk_{act}b_f^4\cos(\lambda)^2L_f^3P_2P_1P_3y^4x^2 + \\
& 120d^2S_Bk_{act}b_f^4\cos(\lambda)^2L_f^3P_2P_1P_3z^4y^2 + 40d^2S_Bk_{act}b_f^4\cos(\lambda)^2L_f^3P_2P_1P_3y^2x^4 + \\
& 120d^2S_Bk_{act}b_f^4\cos(\lambda)^2L_f^3P_2P_1P_3y^2x^2z^2 - 80h_f^2d^2S_Bk_{act}b_f^2\sin(\lambda)P_{23}\cos(\lambda)L_f^3P_2P_1P_3L_B^2yL_B^2 + \\
& 80h_f^2d^2S_Bk_{act}b_f^2\sin(\lambda)P_{23}\cos(\lambda)L_f^3P_2P_1P_3L_B^2yz^2 + \\
& 80h_f^2d^2S_Bk_{act}b_f^2\sin(\lambda)P_{23}\cos(\lambda)L_f^3P_2P_1P_3L_B^2yx^2 + \\
& 80h_f^2d^2S_Bk_{act}b_f^2\sin(\lambda)P_{23}\cos(\lambda)L_f^3P_2P_1P_3L_B^2yx^2 + \\
& 80h_f^2d^2S_Bk_{act}b_f^2\sin(\lambda)P_{23}\cos(\lambda)L_f^3P_2P_1P_3L_B^2y^3 -
\end{aligned}$$

$$80h_f^2d^2S_Bk_{act}b_f^2\sin(\lambda)P_{23}\cos(\lambda)L_f^3P_2P_1P_3yx^2z^2 -$$
$$80h_f^2d^2S_Bk_{act}b_f^2\sin(\lambda)P_{23}\cos(\lambda)L_f^3P_2P_1P_3yx^4 - 80h_f^2d^2S_Bk_{act}b_f^2\sin(\lambda)P_{23}\cos(\lambda)L_f^3P_2P_1P_3y^3x^2 -$$
$$160h_f^2d^2S_Bk_{act}b_f^2\sin(\lambda)P_{23}\cos(\lambda)L_f^3P_2P_1P_3y^3z^2 + 40d^2S_Bk_{act}b_f^4\cos(\lambda)^2L_f^3P_2P_1P_3L_B^2L_B^2y^2 -$$
$$40d^2S_Bk_{act}b_f^4\cos(\lambda)^2L_f^3P_2P_1P_3L_B^2x^2y^2 - 80d^2S_Bk_{act}b_f^4\cos(\lambda)^2L_f^3P_2P_1P_3L_B^2x^2y^2 +$$
$$120d^2S_Bk_{act}h_f^4\cos(\lambda)eL_f^2P_2P_1P_3L_B^2L_B^2z^2 - 120d^2S_Bk_{act}h_f^4\cos(\lambda)eL_f^2P_2P_1P_3L_B^2z^4 -$$
$$120d^2S_Bk_{act}h_f^4\cos(\lambda)eL_f^2P_2P_1P_3L_B^2x^2z^2 + 40h_f^2d^2S_Bk_{act}b_f^2\cos(\lambda)^2L_f^3P_2P_1P_3L_B^2L_B^2y^2 -$$
$$40h_f^2d^2S_Bk_{act}b_f^2\cos(\lambda)^2L_f^3P_2P_1P_3L_B^2x^2y^2 - 80h_f^2d^2S_Bk_{act}b_f^2\cos(\lambda)^2L_f^3P_2P_1P_3L_B^2x^2y^2 -$$
$$40h_f^2d^2S_Bk_{act}b_f^2\cos(\lambda)^2L_f^3P_2P_1P_3L_B^2y^4 - 40h_f^2d^2S_Bk_{act}b_f^2\cos(\lambda)^2L_f^3P_2P_1P_3x^4z^2 +$$
$$40h_f^2d^2S_Bk_{act}b_f^2\cos(\lambda)^2L_f^3P_2P_1P_3y^4x^2 + 120h_f^2d^2S_Bk_{act}b_f^2\cos(\lambda)^2L_f^3P_2P_1P_3z^4y^2 +$$
$$40h_f^2d^2S_Bk_{act}b_f^2\cos(\lambda)^2L_f^3P_2P_1P_3y^2x^4 + 120h_f^2d^2S_Bk_{act}b_f^2\cos(\lambda)^2L_f^3P_2P_1P_3y^2x^2z^2 +$$
$$120h_f^2d^2S_Bk_{act}b_f^2\cos(\lambda)^2L_f^3P_2P_1P_3z^2y^4 - 40h_f^2d^2S_Bk_{act}b_f^2\cos(\lambda)^2L_f^3P_2P_1P_3x^2z^4 -$$
$$132b_f^2d^2S_Bk_{act}h_f^2\cos(\lambda)^2e^2L_fP_2P_1P_3L_B^2L_B^2z^2 - 132b_f^2d^2S_Bk_{act}h_f^2\cos(\lambda)^2e^2L_fP_2P_1P_3L_B^2L_B^2y^2 +$$
$$132b_f^2d^2S_Bk_{act}h_f^2\cos(\lambda)^2e^2L_fP_2P_1P_3L_B^2z^4 + 132b_f^2d^2S_Bk_{act}h_f^2\cos(\lambda)^2e^2L_fP_2P_1P_3L_B^2x^2z^2 +$$
$$132b_f^2d^2S_Bk_{act}h_f^2\cos(\lambda)^2e^2L_fP_2P_1P_3L_B^2y^2 + 132b_f^2d^2S_Bk_{act}h_f^2\cos(\lambda)^2e^2L_fP_2P_1P_3L_B^2y^4 -$$
$$264b_f^2d^2S_Bk_{act}h_f^2\cos(\lambda)^2e^2L_fP_2P_1P_3z^2y^4 - 264b_f^2d^2S_Bk_{act}h_f^2\cos(\lambda)^2e^2L_fP_2P_1P_3z^4y^2 -$$
$$264b_f^2d^2S_Bk_{act}h_f^2\cos(\lambda)^2e^2L_fP_2P_1P_3y^3z^2x + 264b_f^2d^2S_Bk_{act}h_f^2\cos(\lambda)^2e^2L_fP_2P_1P_3z^3y^3 -$$
$$264b_f^2d^2S_Bk_{act}h_f^2\cos(\lambda)^2e^2L_fP_2P_1P_3y^2x^2z^2 - 264b_f^2d^2S_Bk_{act}h_f^2\cos(\lambda)^2e^2L_fP_2P_1P_3y^2z^3x -$$
$$80h_f^2d^2S_Bk_{act}b_f^2\cos(\lambda)\sin(\lambda)L_f^3P_{12}P_2P_1P_3xz^2L_B^2 +$$
$$80h_f^2d^2S_Bk_{act}b_f^2\cos(\lambda)\sin(\lambda)L_f^3P_{12}P_2P_1P_3x^3z^2 + 80h_f^2d^2S_Bk_{act}b_f^2\cos(\lambda)\sin(\lambda)L_f^3P_{12}P_2P_1P_3xz^4 -$$
$$80h_f^2d^2S_Bk_{act}b_f^2\cos(\lambda)\sin(\lambda)L_f^3P_{12}P_2P_1P_3y^2xz^2 + 360d^2S_Bk_{act}h_f^4\cos(\lambda)^2e^2L_fP_{12}P_2P_1P_3xz^2L_B^2 -$$
$$360d^2S_Bk_{act}h_f^4\cos(\lambda)^2e^2L_fP_{12}P_2P_1P_3z^3y^2 - 360d^2S_Bk_{act}h_f^4\cos(\lambda)^2e^2L_fP_{12}P_2P_1P_3y^2zx^2 -$$
$$360d^2S_Bk_{act}h_f^4\cos(\lambda)^2e^2L_fP_{12}P_2P_1P_3x^3z^2 - 360d^2S_Bk_{act}h_f^4\cos(\lambda)^2e^2L_fP_{12}P_2P_1P_3y^3zx -$$
$$360d^2S_Bk_{act}h_f^4\cos(\lambda)^2e^2L_fP_{12}P_2P_1P_3xz^4 + 360d^2S_Bk_{act}h_f^4\cos(\lambda)^2e^2L_fP_{12}P_2P_1P_3y^3z^2 +$$
$$120d^2S_Bk_{act}h_f^4\cos(\lambda)eL_f^2P_{12}P_2P_1P_3xz^2L_B^2 - 120d^2S_Bk_{act}h_f^4\cos(\lambda)eL_f^2P_{12}P_2P_1P_3y^3zx -$$
$$120d^2S_Bk_{act}h_f^4\cos(\lambda)eL_f^2P_{12}P_2P_1P_3x^3z^2 - 120d^2S_Bk_{act}h_f^4\cos(\lambda)eL_f^2P_{12}P_2P_1P_3xz^4 -$$
$$240d^2S_Bk_{act}h_f^4\cos(\lambda)eL_f^2P_{12}P_2P_1P_3y^2zx^2 + 120d^2S_Bk_{act}h_f^4\cos(\lambda)eL_f^2P_{12}P_2P_1P_3y^3z^2 +$$
$$120b_f^2d^2S_Bk_{act}h_f^2\cos(\lambda)eL_f^2P_{12}P_2P_1P_3xz^2L_B^2 - 120b_f^2d^2S_Bk_{act}h_f^2\cos(\lambda)eL_f^2P_{12}P_2P_1P_3y^3zx +$$
$$160d^2S_Bk_{act}b_f^4\cos(\lambda)\sin(\lambda)L_f^3P_{13}P_{12}P_2P_1P_3yxz^2 + 120b_f^2d^2S_Bk_{act}h_f^2\cos(\lambda)eL_f^2P_2P_1P_3L_B^2L_B^2z^2 -$$
$$120b_f^2d^2S_Bk_{act}h_f^2\cos(\lambda)eL_f^2P_2P_1P_3L_B^2z^4 - 120b_f^2d^2S_Bk_{act}h_f^2\cos(\lambda)eL_f^2P_2P_1P_3L_B^2x^2z^2 +$$
$$120b_f^2d^2S_Bk_{act}h_f^2\cos(\lambda)eL_f^2P_2P_1P_3L_B^2x^2y^2 - 120b_f^2d^2S_Bk_{act}h_f^2\cos(\lambda)eL_f^2P_2P_1P_3L_B^2x^2z^2 -$$
$$120b_f^2d^2S_Bk_{act}h_f^2\cos(\lambda)eL_f^2P_2P_1P_3y^2x^4 + 120b_f^2d^2S_Bk_{act}h_f^2\cos(\lambda)eL_f^2P_2P_1P_3y^3z^2x +$$
$$120b_f^2d^2S_Bk_{act}h_f^2\cos(\lambda)eL_f^2P_2P_1P_3y^2x^2z^2 + 120b_f^2d^2S_Bk_{act}h_f^2\cos(\lambda)eL_f^2P_2P_1P_3y^2z^3x +$$
$$120b_f^2d^2S_Bk_{act}h_f^2\cos(\lambda)eL_f^2P_2P_1P_3x^2z^4 + 120b_f^2d^2S_Bk_{act}h_f^2\cos(\lambda)eL_f^2P_2P_1P_3x^4z^2 -$$
$$120b_f^2d^2S_Bk_{act}h_f^2\cos(\lambda)eL_f^2P_2P_1P_3y^4x^2 + 120b_f^2d^2S_Bk_{act}h_f^2\cos(\lambda)eL_f^2P_2P_1P_3z^4y^2 +$$
$$120b_f^2d^2S_Bk_{act}h_f^2\cos(\lambda)eL_f^2P_2P_1P_3z^2y^4 - 120b_f^2d^2S_Bk_{act}h_f^2\cos(\lambda)eL_f^2P_2P_1P_3z^3y^3 +$$
$$180d^2S_Bk_{act}h_f^4\cos(\lambda)^2e^2L_fP_2P_1P_3L_B^2L_B^2z^2 + 180d^2S_Bk_{act}h_f^4\cos(\lambda)^2e^2L_fP_2P_1P_3L_B^2L_B^2y^2 -$$
$$180d^2S_Bk_{act}h_f^4\cos(\lambda)^2e^2L_fP_2P_1P_3L_B^2z^4 - 180d^2S_Bk_{act}h_f^4\cos(\lambda)^2e^2L_fP_2P_1P_3L_B^2x^2z^2 -$$
$$180d^2S_Bk_{act}h_f^4\cos(\lambda)^2e^2L_fP_2P_1P_3L_B^2x^2y^2 - 180d^2S_Bk_{act}h_f^4\cos(\lambda)^2e^2L_fP_2P_1P_3L_B^2y^4 +$$
$$360d^2S_Bk_{act}h_f^4\cos(\lambda)^2e^2L_fP_2P_1P_3z^2y^4 + 360d^2S_Bk_{act}h_f^4\cos(\lambda)^2e^2L_fP_2P_1P_3z^4y^2 +$$
$$360d^2S_Bk_{act}h_f^4\cos(\lambda)^2e^2L_fP_2P_1P_3y^3z^2x - 360d^2S_Bk_{act}h_f^4\cos(\lambda)^2e^2L_fP_2P_1P_3z^3y^3 +$$
$$360d^2S_Bk_{act}h_f^4\cos(\lambda)^2e^2L_fP_2P_1P_3y^2x^2z^2 +$$

$$\begin{aligned}
& 40d^2 S_B k_{act} b_f^4 L_f^3 P_2 P_1 P_3 L_B^2 x^4 \cos(\lambda)^2 - 40d^2 S_B k_{act} b_f^4 L_f^3 P_2 P_1 P_3 L_B^2 L_B^4 \cos(\lambda)^2 + \\
& 40d^2 S_B k_{act} b_f^4 L_f^3 P_2 P_1 P_3 L_B^4 y^2 \cos(\lambda)^2 + 40d^2 S_B k_{act} b_f^4 L_f^3 P_2 P_1 P_3 L_B^2 L_B^2 z^2 \cos(\lambda)^2 - \\
& 80y^3 z^2 b_f^2 d^2 S_B k_{act} h_f^2 L_f^3 P_{13} P_2 P_1 P_3 \cos(\lambda)^2 - 40d^2 S_B k_{act} b_f^4 L_f^3 P_2 P_1 P_3 L_B^2 z^2 y^2 \cos(\lambda)^2 + \\
& 40d^2 S_B k_{act} b_f^4 L_f^3 P_2 P_1 P_3 L_B^2 x^2 L_B^2 \cos(\lambda)^2 - 40h_f^2 d^2 S_B k_{act} b_f^2 L_f^3 P_2 P_1 P_3 L_B^2 z^2 y^2 \cos(\lambda)^2 - \\
& 120h_f^2 d^2 S_B k_{act} b_f^2 L_f^3 P_2 P_1 P_3 L_B^2 z^2 y^2 \cos(\lambda)^2 + 40h_f^2 d^2 S_B k_{act} b_f^2 L_f^3 P_2 P_1 P_3 L_B^2 x^2 L_B^2 \cos(\lambda)^2 - \\
& 40h_f^2 d^2 S_B k_{act} b_f^2 L_f^3 P_2 P_1 P_3 L_B^2 L_B^4 \cos(\lambda)^2 - 40h_f^2 d^2 S_B k_{act} b_f^2 L_f^3 P_2 P_1 P_3 L_B^2 x^4 \cos(\lambda)^2 - \\
& 80d^2 S_B k_{act} b_f^4 L_f^3 P_{13} P_2 P_1 P_3 y^3 z^2 \cos(\lambda)^2 + 40h_f^2 d^2 S_B k_{act} b_f^2 L_f^3 P_2 P_1 P_3 L_B^4 y^2 \cos(\lambda)^2 - \\
& 80y^2 z x^2 b_f^2 d^2 S_B k_{act} h_f^2 L_f^3 P_{12} P_2 P_1 P_3 \cos(\lambda)^2 + 40h_f^2 d^2 S_B k_{act} b_f^2 L_f^3 P_2 P_1 P_3 L_B^4 x^2 \cos(\lambda)^2 + \\
& 80d^2 S_B k_{act} b_f^4 L_f^3 P_{13} P_2 P_1 P_3 L_B^2 y z^2 \cos(\lambda)^2 - 120d^2 S_B k_{act} b_f^4 L_f^3 P_2 P_1 P_3 L_B^2 z^2 y^2 \cos(\lambda)^2 - \\
& 80d^2 S_B k_{act} b_f^4 L_f^3 P_{12} P_2 P_1 P_3 y^2 z x^2 \cos(\lambda)^2 + 80h_f^2 d^2 S_B k_{act} b_f^2 L_f^3 P_{13} P_2 P_1 P_3 L_B^2 y z^2 \cos(\lambda)^2 + \\
& 80d^2 S_B k_{act} b_f^4 L_f^3 P_{12} P_2 P_1 P_3 y^2 z L_B^2 \cos(\lambda)^2 + 40b_f^2 d^2 S_B k_{act} h_f^2 L_f^3 P_2 P_1 P_3 L_B^2 L_B^2 z^2 \cos(\lambda)^2 - \\
& 80z^3 y b_f^2 d^2 S_B k_{act} h_f^2 L_f^3 P_{13} P_{12} P_2 P_1 P_3 \cos(\lambda)^2 + 80h_f^2 d^2 S_B k_{act} b_f^2 L_f^3 P_{12} P_2 P_1 P_3 y^2 z L_B^2 \cos(\lambda)^2 + \\
& 80d^2 S_B k_{act} b_f^4 L_f^3 P_{13} P_{12} P_2 P_1 P_3 y z L_B^2 \cos(\lambda)^2 + 80h_f^2 d^2 S_B k_{act} b_f^2 L_f^3 P_{13} P_{12} P_2 P_1 P_3 y z L_B^2 \cos(\lambda)^2 - \\
& 80d^2 S_B k_{act} b_f^4 L_f^3 P_{13} P_{12} P_2 P_1 P_3 z^3 y \cos(\lambda)^2) / (E_{alu} h_f^3 b_f^3 k_{act} S_B d^2 P_3 P_1 P_2 (b_f^2 + h_f^2) (-y z P_{23} + 2y z x - \\
& P_{13} z x - P_{12} x y + P_{12} P_{13} P_{23})^2)
\end{aligned}$$